



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з курсу

"Економіко-математичне моделювання"

для студентів спеціальності

6.03060101 "Менеджмент організацій"

Харків

2015

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять з курсу
"Економіко-математичне моделювання"
для студентів спеціальності
6.03060101 "Менеджмент організацій"

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 7.06.2013 р.

Харків
НТУ "ХПІ"
2015

Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Економіко-математичне моделювання» для студентів спеціальності 6.03060101 «Менеджмент організацій» / уклад.: О. Б. Білоцерківський, Н. В. Ширяєва. – Х. : НТУ «ХП», 2015. – 88 с.

Укладачі: О. Б. Білоцерківський
Н. В. Ширяєва

Рецензент О. М. Гаврись

Кафедра фінансів

ВСТУП

Для України як самостійної держави з ринковою економікою особливого значення набувають економіко-математичні методи як один із засобів формування динамічно розвинутої та стійкої економіки з науково обґрунтованими шляхами розвитку й прогнозами на майбутнє.

Економіко-математичні методи – це узагальнена назва комплексу економіко-математичних підходів, об'єднаних сферою застосування та призначених для побудови, реалізації і дослідження економічних моделей.

Математичне моделювання в економіці та менеджменті – це використання математичного моделювання при вирішенні господарських завдань й обґрунтуванні прийнятих рішень з управління виробництвом.

У цих методичних вказівках розглянуто основні числові методи, які застосовуються в курсі «Економіко-математичне моделювання». Кожен розділ присвячений окремій темі курсу. Всі розділи побудовані однаково: спочатку викладаються необхідні теоретичні відомості, потім докладно розглядається хід розв'язання задач, наприкінці кожного розділу наведено варіанти індивідуальних домашніх завдань. Варіанти завдань студент вибирає за останньою цифрою номера своєї залікової книжки.

Ці методичні вказівки не замінюють підручників з економіко-математичного моделювання. Теоретичні основи викладаються у стислому вигляді. Даються тільки ті відомості, які необхідні безпосередньо для розв'язання задач. Для більш детального вивчення матеріалу рекомендуються такі навчальні видання [1–10].

ТЕМА 1. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ

Приклад 1.1. Задача про використання ресурсів (задача планування виробництва). Для виготовлення двох видів продукції P_1 і P_2 використовують чотири види ресурсів S_1, S_2, S_3 і S_4 . Дані про запаси ресурсів, кількість одиниць ресурсів, що витрачаються на виготовлення одиниці продукції, наведені в табл. 1.1 (цифри умовні).

Таблиця 1.1

Вид ресурсу	Запас ресурсу	Ресурси, од., затрачувані на виготовлення одиниці продукції	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	—	1
S_4	21	3	—

Прибуток, одержуваний від одиниці продукції P_1 і P_2 , відповідно становить 2 і 3 грн. *Необхідно скласти* такий план виробництва продукції, при якому прибуток від її реалізації буде максимальним.

Розв’язання. Складемо математичну модель задачі. Позначимо x_1, x_2 — кількість одиниць продукції відповідно P_1 і P_2 , запланованих до виробництва. Для їх виготовлення (див. табл. 1.1) буде потрібно $(1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2)$ одиниць ресурсу S_1 , $(2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2)$ одиниць ресурсу S_2 , $(1 \cdot x_2)$ одиниць ресурсу S_3 та $3 \cdot x_1$ одиниць ресурсу S_4 . Оскільки споживання ресурсів S_1, S_2, S_3 і S_4 не повинне перевищувати їх запасів (відповідно 18, 16, 5 і 21 одиниць), то зв'язок між споживанням ресурсів і їх запасами виразиться системою нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18; \\ 2x_1 + x_2 \leq 16; \\ x_2 \leq 5; \\ 3x_1 \leq 21. \end{cases} \quad (1.1)$$

За умовою задачі змінні

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (1.2)$$

Сумарний прибуток F становить $2 \cdot x_1$ від реалізації продукції P_1 та $3 \cdot x_2$ – від реалізації продукції P_2 , тобто

$$F = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2. \quad (1.3)$$

Отже, математична модель задачі: знайти такий план випуску продукції $X = (x_1, x_2)$, що задовольняє систему (1.1) й умову (1.2), при якому функція (1.3) набуває максимального значення.

Приклад 1.2. Складання раціону (задача про дієту, про суміші).

При відгодівлі кожна тварина щодня повинна одержати не менше 9 од. поживної речовини S_1 , не менше 8 од. поживної речовини S_2 , не менше 12 од. поживної речовини S_3 . Для складання раціону використовують два види корму – I і II. Вміст кількості одиниць поживних речовин в 1 кг кожного виду корму й вартість 1 кг корму наведені в табл. 1.2. Вартість 1 кг корму I і II відповідно дорівнює 4 і 6 грн. *Необхідно скласти* денний раціон, що має мінімальну вартість, у якому вміст кожного виду поживних речовин був би не меншим від установленної межі.

Таблиця 1.2

Поживна речовина (вітамін)	Необхідний мінімум поживних речовин	Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг корму	
		I	II
S_1	9	3	1
S_2	8	1	2
S_3	12	1	6

Розв’язання. Складемо економіко-математичну модель задачі. Позначимо x_1, x_2 – кількість кормів I і II, що входять у денний раціон. Тоді цей раціон (див. табл. 1.2) буде включати $(3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2)$ одиниць поживної речовини S_1 , $(1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2)$ одиниць речовини S_2 і $(1 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2)$ одиниць поживної речовини S_3 . оскільки вміст поживних речовин S_1, S_2, S_3 у раціоні повинен бути не менше як 9, 8 і 12 одиниць відповідно, то одержимо таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9; \\ x_1 + 2x_2 \geq 8; \\ x_1 + 6x_2 \geq 12. \end{cases} \quad (1.7)$$

Крім того, змінні

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (1.8)$$

Загальна вартість раціону, грн, буде такою:

$$F = 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2. \quad (1.9)$$

Отже, економіко-математична модель задачі: скласти денний раціон $X = (x_1, x_2)$, що задовольняє систему (1.7) й умову (1.8) і при якому функція (1.9) набуває мінімального значення.

Приклад 1.3. Задача про розкрій матеріалів. Для виготовлення брусів довжиною 1,2, 3 і 5 м у співвідношенні 2:1:3 на розпил надходять 195 колод завдовжки 6 м. *Визначити* план розпилу, що забезпечує максимальну кількість комплектів. Скласти економіко-математичну модель задачі.

Розв’язання. Насамперед розглянемо різні способи розпилювання колод, указавши відповідну кількість одержуваних при цьому брусів (табл. 1.3).

Таблиця 1.3

Спосіб розпилювання i	Кількість одержуваних брусів довжиною, м		
	1,2	3,0	5,0

1	5	–	–
2	2	1	–
3	–	2	–
4	–	–	1

Позначимо: x_i – кількість колод, розпиляних i -м способом ($i = \overline{1, 4}$); x – число комплектів брусів. З огляду на те, що всі колоди повинні бути розпиляні, а кількість брусів кожного розміру має задовольняти умову комплектності, економіко-математична модель задачі набуває вигляду:

$$F = x \rightarrow \max$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 195; \\ 5x_1 + 2x_2 = 2x; \\ x_2 + 2x_3 = x; \\ x_4 = 3x. \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3, 4).$$

Приклад 1.4. Задача про завантаження обладнання. На трьох групах обладнання (I, II, III) необхідно виготовити вироби чотирьох видів. Установлено план виробництва: виробів типу А – 2000 шт., Б – 1000 шт., В – 200 шт., Г – 250 шт. Дані про собівартість кожного виробу, трудомісткість і фонд робочого часу задані в табл. 1.4. Скласти план завантаження обладнання, при якому мінімізується собівартість вироблених товарів.

Таблиця 1.4

Обладнання	Собівартість одного виробу, грн				Час виготовлення одного ви- робу, хв				Фонд часу
	А	Б	В	Г	А	Б	В	Г	
I	1,5	2,4	0,9	1,4	4,1	2,5	3,5	8,1	35000
II	1,8	1,2	1,0	1,7	2,5	4,0	1,2	1,0	16000
III	2,7	5,4	6,0	5,6	1,7	1,5	1,0	1,2	22000

Розв’язання. Математична модель цієї задачі:

$$\begin{cases} 4,1x_{11} + 2,5x_{12} + 3,5x_{13} + 8,1x_{14} \leq 35000; \\ 2,5x_{21} + 4,0x_{22} + 1,2x_{23} + 1,0x_{24} \leq 16000; \\ 1,7x_{31} + 1,5x_{32} + 1,0x_{33} + 1,2x_{34} \leq 22000. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2000; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1000; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 200; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 250. \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0,$$

$$F = 1,5x_{11} + 2,4x_{12} + 0,9x_{13} + 1,4x_{14} + 1,8x_{21} + 1,2x_{22} + 1,0x_{23} + 1,7x_{24} + 2,7x_{31} + 5,4x_{32} + 6,0x_{33} + 5,6x_{34} \rightarrow \min.$$

Завдання до теми 1

Варіант 0. Фірма виготовляє три види продукції (А, Б, В). Для випуску кожного потрібен певний час обробки на всіх чотирьох пристроях I, II, III, IV (табл. 1.6). Час роботи на пристроях становить відповідно 84, 42, 21 і 42 год. *Визначити*, яку продукцію та у яких кількостях варто виробляти для максимізації прибутку (ринок збуту для кожного продукту необмежений).

Таблиця 1.6

Вид продукції	Час обробки, год				Прибуток, дол.
	I	II	III	IV	
А	1	3	1	2	3
Б	6	1	3	3	6
В	3	3	2	4	4

Варіант 1. Фірмі потрібне вугілля з вмістом фосфору не більше 0,03 % і з домішкою попелу не більше 3,25 %. Доступні три сорти вугілля А, Б, В за такими цінами (за 1 т), поданими у табл. 1.7.

Таблиця 1.7

Сорт вугілля	Вміст фосфору, %	Вміст попелу, %	Ціна, дол.
А	0,06	2,0	30
Б	0,04	4,0	30
В	0,02	3,0	45

Як потрібно змішати вугілля, щоб задовольнити обмеження на вміст домішок та мінімізувати ціну?

Варіант 2. Фірма виготовляє два продукти A і B , ринок збуту яких не обмежений. Кожен продукт проходить обробку кожною з трьох машин – I, II, III. Час обробки для кожного з виробів A і B наведено в табл. 1.8. Час роботи машин I, II, III відповідно становить 40, 36 і 36 годин на тиждень. Прибуток від виробів A і B – відповідно 5 і 3 дол. Фірмі треба визначити тижневі норми випуску виробів A і B , що максимізують прибуток.

Таблиця 1.8

Продукт	Час обробки машиною, год		
	I	II	III
A	0,5	0,4	0,2
B	0,25	0,3	0,4

Варіант 3. Фірма займається складанням дієти, що повинна містити принаймні 20 од. білків, 30 од. вуглеводів, 10 од. жирів і 40 од. вітамінів. Як найдешевше досягти цього при зазначених у табл. 1.9 цінах за 1 кг (або 1 л) п'яти наявних продуктів?

Таблиця 1.9

Показники	Хліб	Соя	Сушена риба	Фрукти	Молоко
Білки, од.	2	12	10	1	2
Вуглеводи, од.	12	0	0	4	3
Жири, од.	1	8	3	0	4
Вітаміни, од.	0,2	2	4	6	2
Ціна, грн	12	36	32	18	10

Варіант 4. Підприємство випускає три види виробів. Місячна програма випуску становить 200 виробів першого виду, 1800 – другого, 1500 – третього. Для випуску виробів використовують матеріали, щомісячні витрати яких не можуть перевищувати 61 000 кг. На один виріб 1-го виду витрачається 8 кг матеріалу, 2-го – 10 кг, 3-го – 11 кг. Оптова ціна одного виробу першого виду – 7 грн, другого й третього – 10 та 19 грн відповідно. Визначити оптимальний план випуску продукції, який забезпечує підприємству максимальний виторг.

Варіант 5. Меблева фабрика виготовляє столи, стільці, бюро й книжкові шафи, використовуючи два різні види дошок, причому фабрика має 500 м³ дошок першого виду і 1000 м³ дошок другого виду. Крім того, задано трудові ресурси в кількості 800 люд.-год. У табл. 1.10 наведено нормативи витрат кожного виду ресурсів на виготовлення одного виробу й прибуток на один виріб.

Таблиця 1.10

Параметри	Столи	Стільці	Бюро	Книжкові шафи
Дошки першого виду, м ³	5	1	9	12
Дошки другого виду, м ³	2	3	4	1
Трудові ресурси, люд.-год	3	2	5	10
Прибуток на один виріб, тис. грн	12	5	15	10

За цими даними розв'язати задачу: визначити оптимальний асортимент, що максимізує прибуток.

Варіант 6. Для перевезення вантажу використовують машини типів А й Б. Вантажопідйомність машин обох типів – 3 т. За один раз машина А витрачає 1,5 кг мастильних матеріалів і 50 л бензину, а машина Б – відповідно – 2 кг і 30 л. На базі є 35 кг мастильних матеріалів і 100 л бензину. Витрати на експлуатацію машини А становлять 80 грн, Б – 50 грн. Необхідно перевезти 60 т вантажу. Скільки потрібно використати машин типу А й Б, щоб експлуатаційні витрати були мінімальними?

Варіант 7. Деяка особа – інвестор хоче зробити внесок у сумі 300 тис. грн. Таблиця 1.11 показує варіанти інвестицій та рівень віддачі. Інвестор хоче, щоб як мінімум 30 тис. грн були в державних облігаціях. Оскільки акції А і Б є ризикованими, інвестор бажає, щоб спільні інвестиції в них не перевищували 50 тис. грн. Інвестор також має припущення, що процентні ставки банків будуть високими, і він вирішив, що мінімум 25 % інвестицій повинні бути в акціях банків. Останньою інвестиційною умовою є те, що сума грошей, вкладених в інвестиційний фонд А, не повинна бути більшою, ніж та, що вкладена в інвестиційний фонд Б. Задача полягає в тому, щоб визначити, як потрібно вкласти гроші (в кожен вид інвестицій) аби річний прибуток був максимальним. Сформулюйте модель лінійного програмування.

Таблиця 1.11

№ з/п	Інвестиції	Рівень віддачі
1	Інвестиційний фонд А	0,12
2	Інвестиційний фонд Б	0,14
3	Акції банків	0,15
4	Державні облігації	0,125
5	Акції А	0,16
6	Акції Б	0,18

Варіант 8. Кондитерська фабрика для виробництва трьох сортів карамелі A_1 , A_2 , A_3 використовує три види сировини: цукор-пісок, патоку і фруктове пюре. Норми використання сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі кожного сорту наведені в табл. 1.12, а також відома загальна кількість сировини кожного виду й прибуток від реалізації 1 т карамелі цього сорту.

Таблиця 1.12

Вид сировини	Норми витрат сировини, т на 1 т продукції	Загальна ма-
--------------	---	--------------

	A_1	A_2	A_3	са сировини, т
Цукор-пісок	0,3	0,2	0,1	1000
Патока	0,8	0,2	0,3	800
Фруктове пюре	0,4	0,1	0,1	150
Прибуток від реалізації 1 т продукції, тис. грн	1,2	3,2	2,5	—

Необхідно розрахувати план виробництва карамелі, який забезпечує максимальний прибуток.

Варіант 9. Нафтопереробний завод одержує чотири напівфабрикати: 400 тис. л алкілату, 250 тис. л крекінг-бензину, 350 тис. л бензину прямої перегонки й 100 тис. л ізопентолу. У результаті змішування цих чотирьох компонентів у різних пропорціях утворюється три сорти авіаційного бензину: марки A – 2:3:5:2; B – 3:1:2:1 і C – 2:2:1:3. Вартість 1 тис. л зазначених сортів бензину: A – 1,2 тис. грн, B – 1,1 тис. грн, C – 1,5 тис. грн. Визначити пропорцію змішування компонентів, за якої буде досягнуто максимальної вартості всієї продукції, а також розрахувати оптимальний план змішування за умови максимального використання компонентів.

ТЕМА 2. ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Приклад 2.1. Розв'язати графічним методом таку задачу:

$$Z = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \min, \max ;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4; \\ x_1 - 2x_2 \leq 0; \\ 2x_1 - 5x_2 \geq -34; \\ x_1 \leq 8. \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Побудуємо в декартовій системі координат X_1OX_2 багатокутник розв'язків, що є перетином півплощин кожної з нерівностей системи обмежень. Пронумеруємо нерівності:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4; & (1) \\ x_1 - 2x_2 \leq 0; & (2) \\ 2x_1 - 5x_2 \geq -34; & (3) \\ x_1 \leq 8; & (4) \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Спочатку будуємо відокремлюючу пряму кожної нерівності, що входить у систему обмежень. Потім вибираємо півплощину розв'язку відносно кожної прямої. Для цього беремо координату будь-якої точки, що не лежить на відокремлюючій прямій, і підставляємо у відповідну нерівність. Якщо нерівність виконується, то обрана точка лежить у півплощині розв'язків, якщо не виконується, то не лежить. Багатокутник, у якому перетинаються, накладаються одна на одну всі побудовані півплощини є *областю допустимих розв'язків* (ОДР) або *областю допустимих планів*. Він може бути закритим або відкритим. ОДР для даної задачі набуває такого вигляду, як показано пунктиром на рис. 2.1.

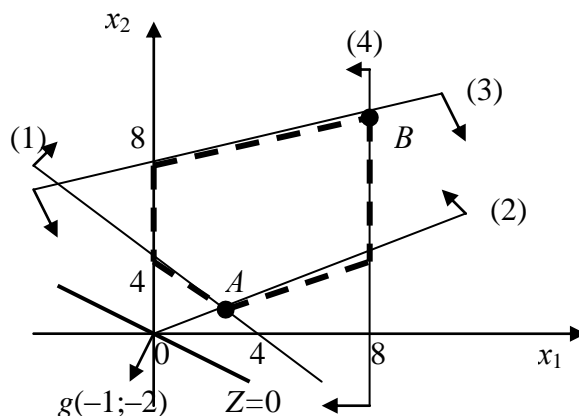


Рисунок 2.1 – Область допустимих розв'язків прикладу 2.1

Прямі (1) – (4) на рис. 2.1 будувалися за такими точками:

Змінна	Номер рівняння				
	(1)	(2)	(3)	(4)	$Z = 0$

x_1	0	4	0	2	3	-2	8	8	-2	2
x_2	4	0	0	1	8	6	0	8	1	-1

Пряма $g(-1; -2)$ завжди виходить з точки $(0; 0)$ у точку $(-1; -2)$, де $(-1; -2)$ – коефіцієнти при змінних у функції мети $Z = -x_1 - 2x_2$. Умова задачі $x_1, x_2 \geq 0$ означає, що ОДР лежить у першій чверті декартової системи координат $x_1 O x_2$.

Для визначення Z_{\max} необхідно переміщати лінію рівня $Z = 0$ у напрямку зростання градієнта g доти, доки лінія рівня не перетне останню точку ОДР, і ця точка й буде точкою максимуму. Для визначення Z_{\min} переміщення відбувається в напрямку $-g$. Якщо багатокутник необмежений, то можливі випадки, коли $Z_{\max} \rightarrow \pm\infty$ або $Z_{\min} \rightarrow \pm\infty$.

У розглянутому прикладі переміщення лінії рівня відбувається в напрямку, зворотному напрямку градієнта g , тобто в напрямку убуття градієнта. Тому перша кутова точка ОДР буде точкою \max , а остання точка цього багатокутника розв'язків – точкою \min (точки A і B відповідно). Знайдені в такий спосіб точки будуть доставляти оптимальні значення функції мети.

Знайдемо координати точок A і B як точок перетину відокремлюючих прямих:

$$A: \begin{cases} x_1 + x_2 = 4; \\ x_1 - 2x_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8/3 \\ x_2 = 4/3 \end{cases} \Rightarrow A(8/3; 4/3),$$

$$B: \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = -34; \\ x_1 = 8; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow B(8; 10).$$

Отже, $Z_{\max}(A) = -16/3$, $Z_{\min}(B) = -28$.

Приклад 2.2. Розв'язати графічним методом таку задачу:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18; & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 16; & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 \leq 5; & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 \leq 21. & (4) \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Побудуємо ОДР і знайдемо точку максимуму (рис. 2.2).

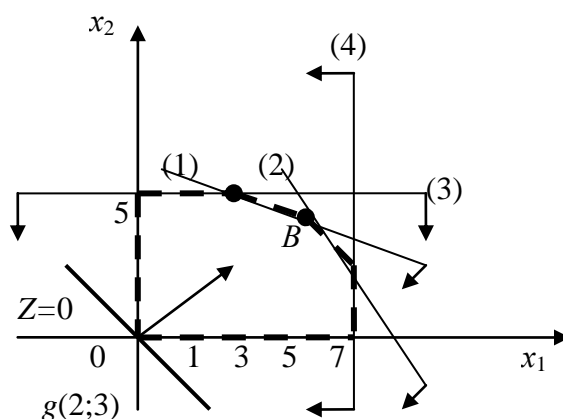


Рисунок 2.2 – Область допустимих розв'язків прикладу 2.2

Кутова точка ОДР, тобто точка B , є точкою тах. Знайдемо координати цієї точки:

$$B: \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18; \\ 2x_1 + x_2 = 16; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow B(6;4).$$

Отже, $Z_{\max}(B) = 24$, тобто при продажі 6 одиниць продукту P_1 і 4 одиниць продукту P_2 максимальний прибуток становитиме 24 у.о.

Приклад 2.3. Розв'язати графічним методом таку задачу:

$$Z = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8; & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 1; & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2. & (3) \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Побудуємо ОДР і знайдемо точку максимуму (рис. 2.3).

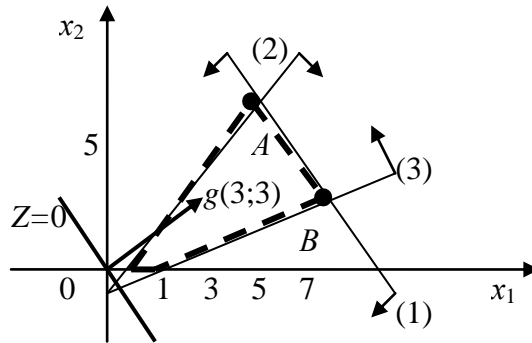


Рисунок 2.3 – Область допустимих розв'язків прикладу 2.3

Оскільки лінія рівня збігається з прямою AB : $x_1 + x_2 = 8$, то на всьому відрізку AB матимемо $Z = Z_{\max} = 3x_1 + 3x_2 = 3(x_1 + x_2) = 3 \cdot 8 = 24$. Тоді задача має нескінченну множину розв'язків, серед яких два базисних оптимальних розв'язки: точки $A(3;5)$ і $B(6;2)$. Точки відрізка AB задаються рівнянням $x_2 = 8 - x_1$, де $3 \leq x_1 \leq 6$. Таким чином, $Z_{\max} = 24$ за нескінченної множини розв'язків $x_1 = 3$, $x_2 = 8 - c$, де $3 \leq c \leq 6$.

Приклад 2.4. Розв'язати графічним методом таку задачу:

$$Z = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 9x_5 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 - 7x_5 = 13; (1) \\ x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 2x_4 - 14x_5 = 20; (2) - (1) \\ x_1 + 3x_2 + 20x_3 + 6x_4 - 23x_5 = 19. (3) - (1) \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}).$$

Розв'язання. Застосовуючи метод Жордано – Гаусса, здійснимо виключення з системи обмежень задач базисних змінних.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 - 7x_5 = 13; (1) \\ x_2 + 6x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 7; (2) \\ 2x_2 + 13x_3 + 9x_4 - 16x_5 = 6. (3) - (2) \cdot 2 \end{cases}$$

Остаточнo маємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 - 7x_5 = 13; (1) \\ x_2 + 6x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 7; (2) \\ x_3 - x_4 - 2x_5 = -8. (3) \end{cases}$$

Звідси випливає: $x_3 = -8 + x_4 + 2x_5$; $x_2 = 55 - 11x_4 - 5x_5$;
 $x_1 = 14 + 7x_4 - 2x_5$. А цільова функція набуде вигляду:
 $Z = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 9x_5 = 35 - 3x_4 - 6x_5$.

Початкову задачу можна подати у такому вигляді:

$$Z = -3x_4 - 6x_5 + 35 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -7x_4 + 2x_5 \leq 14; (1) \\ 11x_4 + 5x_5 \leq 55; (2) \\ x_4 + 2x_5 \geq 8. (3) \end{cases}$$

$$x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Розв'яжемо її графічно.

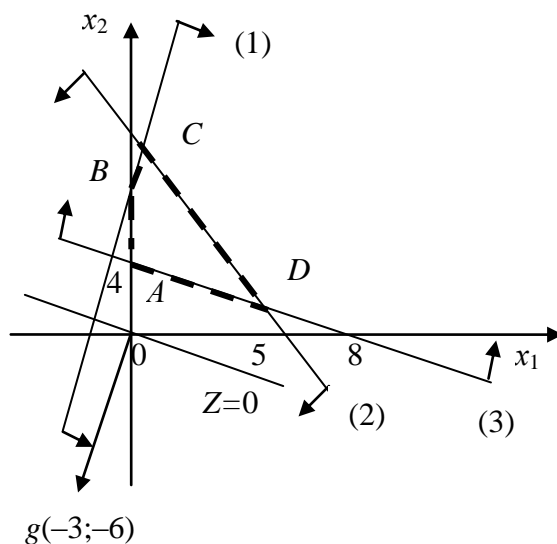


Рисунок 2.4 – Область допустимих розв'язків прикладу 2.4

Координати точки D знайдемо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 11x_4 + 5x_5 = 55; \\ x_4 + 2x_5 = 8. \end{cases}$$

Одержимо $D\left(\frac{70}{17}; \frac{33}{17}\right)$. Оцінимо тепер значення цільової функції у то-

чках A і D : $Z_A = -3 \cdot 0 - 6 \cdot 4 + 35 = 11$; $Z_D = -3 \cdot \frac{70}{17} - 6 \cdot \frac{33}{17} + 35 = 11$.

Таким чином функція Z набуває однакових значень в точках A і D , тобто в усіх точках відрізка AD . Значить оптимальний розв'язок задачі такий: $(-2C+8; C)$, де $C \in \left[\frac{33}{17}; 4\right]$.

Для відшукування оптимального розв'язку початкової задачі треба підставити знайдені значення x_4, x_5 у формули, що визначають значення базисних змінних x_1, x_2, x_3 . У результаті такої підстановки оптимальний розв'язок початкової задачі виявиться таким:

$$x_1 = -16C + 70; \quad x_2 = 17C - 33; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = -2C + 8; \quad x_5 = C.$$

А оптимальне значення цільової функції дорівнює: $Z_{\max} = 11$.

Завдання до теми 2

Для свого варіанта вихідних даних розв'язати графічним методом ЗЛП. Варіант вибрати за останньою цифрою номера залікової книжки.

Завдання 2.1

Варіант	Задача	Варіант	Задача
0	$Z = x_1 + x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8; \\ x_1 \leq 6; \\ x_2 \leq 5. \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$	5	$Z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5; \\ 10x_1 + 3x_2 \leq 30; \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$
1	$Z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min(\max)$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10; \\ x_1 + x_2 \geq 1; \\ x_2 \geq 1; \\ x_2 \leq 4. \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0$	6	$Z = x_1 - 3x_2 \rightarrow \min(\max)$ $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \geq 30; \\ x_1 - x_2 \geq 4; \\ -x_1 + x_2 \geq 3; \\ x_1 + x_2 \leq 10. \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0$
2	$Z = x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1; \\ x_1 + x_2 \leq 2; \\ x_1 - 2x_2 \geq 0; \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 1. \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0$	7	$Z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \min(\max)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20; \\ -x_1 + 4x_2 \leq 20; \\ x_1 \geq 5; \\ x_2 \geq 5. \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0$
3	$Z = x_1 + 3x_2 \rightarrow \min(\max)$ $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \geq 30; \\ -x_1 + x_2 \leq 5; \\ x_1 + x_2 \leq 10; \\ x_2 \geq 2. \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0$	8	$Z = x_1 + x_2 \rightarrow \min(\max)$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 2; \\ x_1 + x_2 \leq 2; \\ x_1 - 2x_2 \leq 1. \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0$
4	$Z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min(\max)$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3; \\ x_1 + x_2 \leq 6; \\ -x_1 + 3x_2 \leq 10; \\ x_1 + 4x_2 \geq 4. \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0$	9	$Z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min(\max)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10; \\ -x_1 + x_2 \leq 4; \\ x_1 = 5. \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0$

Завдання 2.2

Варіант	Задача	Варіант	Задача
0	$Z = -x_1 + 4x_2 + 2x_4 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 5; \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4; \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$	5	$Z = x_1 + 3x_2 - x_4 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 5; \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4; \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$
1	$Z = x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 10. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	6	$Z = 3x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \min$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 10. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
2	$Z = x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9; \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	7	$Z = 3x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9; \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
3	$Z = -16x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 10; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6; \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 8. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$	8	$Z = 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 + 5x_5 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 10; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6; \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 8. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$
4	$Z = 3x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 + 6x_5 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22; \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$	9	$Z = 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22; \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

ТЕМА 3. СИМПЛЕКС-МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Приклад 3.1. Використовуючи симплекс-метод, знайти мінімальне значення лінійної функції $Z = x_1 - x_2 - 3x_3$

при обмеженнях
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1; \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2; \quad x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, 3). \\ 3x_1 + x_3 \leq 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Цю задачу можна подати у такій канонічній формі: знайти мінімальне значення лінійної функції

$$\begin{aligned} Z &= x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{при обмеженнях} \quad &\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2; \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5. \\ x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1, 6}). \end{cases} \end{aligned}$$

Запишемо систему обмежень у векторній формі:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4 + x_5 A_5 + x_6 A_6 = B,$$

$$\text{де } A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Одиничні вектори A_4, A_5, A_6 вибираємо за базис початкового опорного плану, вільні невідомі x_1, x_2, x_3 прирівнюємо до нуля. У результаті одержимо початковий опорний план, якому відповідає розкладання $x_4 A_4 + x_5 A_5 + x_6 A_6 = B$.

$$X_0 = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 2, x_6 = 5).$$

Для перевірки плану на оптимум складемо першу симплексну таблицю й обчислюємо значення $Z_j - C_j$:

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	1	-1	-3	0	0	0	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_4	0	1	2	-1	1	1	0	0	1/1
2	A_5	0	2	-4	2	-1	0	1	0	
3	A_6	0	5	3	0	1	0	0	1	5/1
$m+1$	$Z_j - C_j$		0	-1	1	3	0	0	0	

Для векторів базису оцінки є нульовими. Серед отриманих оцінок є дві додатні: $Z_2 - C_2 = 1 > 0$, $Z_3 - C_3 = 1 > 0$, що свідчить про неоптимальність початкового опорного плану. Його можна поліпшити, включивши в базис вектор, якому відповідає оцінка 3. Серед елементів стовпця A_3 будемо розглядати тільки додатні. Знайдемо розв'язуючий елемент, оцінивши значення $\theta = b_i / a_{ik}$ для кожного додатного значення стовпця A_3 . Оскільки $\min(1/1; 5/1) = 1/1 = 1$, то розв'язуючим елементом буде число 1, що розташоване на перетині першого рядка й третього стовпця. Отже, вектор A_3 необхідно ввести в базис, а вектор A_4 виключити з нього.

Складемо другу симплексну таблицю. Спочатку підрахуємо нові елементи розв'язуючого рядка. Для цього старі елементи розв'язуючого рядка розділимо на розв'язуючий елемент (на 1) для того, щоб він став рівним 1. Далі за допомогою рівнянь Жордана – Гаусса перетворимо всі елементи розв'язуючого стовпця, крім розв'язуючого елемента, в нуль. Для цього виконаємо такі перетворення: розв'язуючий рядок додамо до другого рядка, а також до третього, помноживши на (-1). Далі розрахуємо ряд оцінок. У результаті одержимо таблицю:

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	1	-1	-3	0	0	0	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_3	-3	1	2	-1	1	1	0	0	
2	A_5	0	3	-2	1	0	1	1	0	3/1
3	A_6	0	4	1	1	0	-1	0	1	4/1
$m+1$	$Z_j - C_j$		-3	-7	4	0	-3	0	0	

Таким чином отримали новий опорний план $X_0^{(1)} = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 3, x_6 = 4)$, якому відповідає значення лінійної функції $Z = -3$. У рядку $m+1$ знову є додатний елемент $Z_2 - C_2 = 4 > 0$. Це означає, що новий опорний план неоптимальний і вектор A_2 підлягає включенню в базис. Знайдемо розв'язуючий елемент, оцінивши значення $\theta = b_i / a_{ik}$ для кожного додатного значення стовпця A_2 . Оскільки $\min(3/1; 4/1) = 3/1 = 3$, то розв'язуючим елементом буде число 1, що розташоване на перетині другого рядка й другого стовпця. Отже, вектор A_5 виключається з базису, а вектор A_2 вводиться у нього. Тоді маємо:

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	1	-1	-3	0	0	0	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_3	-3	4	0	0	1	2	1	0	
2	A_2	-1	3	-2	1	0	1	1	0	
3	A_6	0	1	3	0	0	-2	-1	1	1/3
$m+1$	$Z_j - C_j$		-15	1	0	0	-1	-4	0	

Новий опорний план: $X_0^{(2)} = (x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1)$, $Z = -15$. У рядку $m+1$ знову є додатний елемент: $Z_1 - C_1 = 1 > 0$. Це означає, що новий опорний план неоптимальний і вектор A_1 підлягає включенню в базис. Оскільки $\theta_{\min}(1/3) = 1/3$, то розв'язуючим елементом буде число 3, що знаходиться на перетині третього рядка й першого стовпця. Отже, вектор A_6 виключається з базису, а вектор A_1 вводиться у нього. Нова симплексна таблиця має такий вигляд:

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	1	-1	-3	0	0	0	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_3	-3	4	0	0	1	2	1	0	
2	A_2	-1	11/3	0	1	0	-1/3	1/3	2/3	
3	A_1	1	1/3	1	0	0	-2/3	-1/3	1/3	
$m+1$	$Z_j - C_j$		-46/3	0	0	0	-19/3	-11/3	-1/3	

Одержали новий опорний план $X_0^{(3)} = (x_1 = 1/3, x_2 = 11/3, x_3 = 4, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0)$, якому відповідає значення лінійної функції $Z = -46/3$.

Оскільки в $m + i$ рядку четвертої ітерації всі оцінки від'ємні та нульові оцінки відповідають лише векторам, які входять у базис, то можна зробити висновок, що зазначений план для цієї задачі є оптимальним і єдиним.

Приклад 3.2. Розв'язати симплексним методом таку задачу лінійного програмування (ЗЛП): знайти $Z = -x_5 - 2x_6 \rightarrow \min$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_5 + x_6 = 12; \\ x_2 + 5x_5 - x_6 = 30; \\ x_3 + x_5 - 2x_6 = 6; \\ x_4 + \frac{3}{2}x_5 - x_6 = 9. \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,6})$$

Оскільки вектори $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ одиничні, то, ви-

бираючи їх як базисні, заповнимо першу симплексну таблицю. Серед найбільших додатних оцінок $m + 1$ -го рядка є оцінка 4, що відповідає стовпцю A_5 , тому п'ятий стовпець буде розв'язуючим.

і	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	0	0	0	0	-4	-2	θ	$\frac{a_{i6}}{a_{i5}}$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6		
1	A_1	0	12	1	0	0	0	1	-1	12	1
2	A_2	0	30	0	1	0	0	5	-1	6	-1/5
3	A_3	0	6	0	0	1	0	1	-2	6	-2
4	A_4	0	9	0	0	0	1	3/2	-1	6	-2/3
$m + 1$	$Z_j - C_j$		0	0	0	0	0	4	2		

З першої симплексної таблиці виходить, що

$$\frac{b_1}{a_{15}} = \frac{12}{1} = 12; \frac{b_2}{a_{25}} = \frac{30}{5} = 6; \frac{b_3}{a_{35}} = \frac{6}{1} = 6; \frac{b_3}{a_{35}} = \frac{9}{3/2} = 6.$$

При цьому існують три відношення, значення яких є однаковими, тому вибрати однозначно розв'язуючий рядок не можна. У зв'язку з цим застосуємо правило для визначення розв'язуючого рядка. Для цього розглянемо відношення елементів наступного стовпчика, що не входить у базис, до елементів $a_{i5} \neq 0$:

$$\frac{a_{16}}{a_{15}} = \frac{1}{1} = 1; \frac{a_{26}}{a_{25}} = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}; \frac{a_{36}}{a_{35}} = \frac{-2}{1} = -2; \frac{a_{46}}{a_{45}} = \frac{-1}{3/2} = -\frac{2}{3}.$$

Результати обчислень таких відношень запишемо в додатковому стовпці таблиці симплекса. Серед цих відношень мінімальним є $\frac{a_{36}}{a_{35}} = \frac{-2}{1} = -2$. Воно

відповідає третьому рядку. Тому як розв'язуючий приймаємо саме третій рядок. Отже, вектор A_5 , вводимо до базису, а вектор A_3 виводимо з базису.

Складемо другу симплексну таблицю. Для цього за допомогою третього рядка виконаємо перетворення методом повних виключень, тобто помножимо на (-1) третій рядок і додамо до першого рядка, помножимо його на (-5) і додамо до другого рядка, помножимо його на $(-3/2)$ і додамо до четвертого рядка. При цьому таблиця набуває такого вигляду:

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	0	0	0	0	-4	-2	θ	$\frac{a_{i3}}{a_{i6}}$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6		
1	A_1	0	6	1	0	-1	0	0	3	2	-1/3
2	A_2	0	0	0	1	0	0	0	9	0	-5/9
3	A_5	-4	6	0	0	1	0	1	-2		-1/2
4	A_4	0	0	0	0	-3/2	1	0	2	0	-3/4
$m+1$	$Z_j - C_j$		-24	0	0	-4	0	0	10		

З другої симплексної таблиці видно, що максимальна додатна оцінка 10 перебуває в шостому стовпці. Отже, цей стовпець буде розв'язуючим. Для вибору розв'язуючого рядка розглядаємо відношення $\theta = b_i / a_{ik}$ для додатних елементів шостого стовця:

$$\frac{b_1}{a_{16}} = \frac{6}{3} = 2; \frac{b_2}{a_{26}} = \frac{0}{9} = 0; \frac{b_4}{a_{46}} = \frac{0}{2} = 0. \text{ Серед цих ві-}$$

дношень мінімальними є два. Тому розглядаємо відношення елементів стовпця, що не входить у базис (тобто третього), до елементів шостого стовпця:

$$\frac{a_{13}}{a_{16}} = -\frac{1}{3}; \frac{a_{23}}{a_{26}} = -\frac{5}{9}; \frac{a_{33}}{a_{36}} = -\frac{1}{2}; \frac{a_{43}}{a_{46}} = \frac{-3/2}{2} = -\frac{3}{4}.$$

Серед цих відношень мінімальним є $\frac{a_{43}}{a_{46}} = \frac{-3/2}{2} = -\frac{3}{4}$. Отже, розв'язуючим буде четвертий рядок. Далі

розв'язання задачі подано у вигляді таких симплексних таблиць:

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	0	0	0	0	-4	-2	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_1	0	6	1	0	5/4	-3/2	0	0	2
2	A_2	0	0	0	1	7/4	-9/2	0	0	0
3	A_5	-4	6	0	0	-1/2	1	1	0	
4	A_6	-2	0	0	0	-3/4	1/2	0	1	
$m+1$	$Z_j - C_j$		-24	0	0	7/2	-5	0	0	

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	0	0	0	0	-4	-2	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_1	0	6	1	-5/7	0	12/7	0	0	7/2
2	A_3	0	0	0	4/7	1	-18/7	0	0	
3	A_5	-4	6	0	2/7	0	-2/7	1	0	
4	A_6	-2	0	0	3/7	0	-10/7	0	1	
$m+1$	$Z_j - C_j$		-24	0	-2	0	4	0	0	

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	0	0	0	0	-4	-2
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	7/2	7/12	-5/12	0	1	0	0
2	A_3	0	9	3/2	-1/2	1	0	0	0
3	A_5	-4	7	1/6	1/6	0	0	1	0
4	A_6	-2	5	5/6	-1/6	0	0	0	1
$m+1$	$Z_j - C_j$		-38	-7/3	-1/3	0	0	0	0

Серед оцінок $Z_j - C_j$ в останній симплексній таблиці немає додатних. Тому опорний розв'язок $X = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 9, x_4 = 7/2, x_5 = 7, x_6 = 5)$ буде оптимальним, а найменше значення лінійної функції $Z_{\min} = -38$.

Завдання до теми 3

Для свого варіанта вихідних даних розв'язати симплекс-методом ЗЛП.

Варіант вибрати за останньою цифрою номера залікової книжки.

Варіант	Задача	Варіант	Задача
0	$Z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 - x_3 \leq 6; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5; \\ -2x_1 + 2x_3 \geq -4. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	5	$Z = 3x_1 - 2x_2 - x_3 \rightarrow \min$ $\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 3x_3 \geq -6; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
1	$Z = 5x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 5; \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \geq -3. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	6	$Z = x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_3 \leq 10; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
2	$Z = -x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -2; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 8. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	7	$Z = x_1 + 3x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 \geq 2; \\ -x_1 - 2x_3 \geq -6. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
3	$Z = -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10; \\ x_1 - x_2 \leq 2. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	8	$Z = x_1 + 3x_2 + 9x_3 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 10; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -2. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
4	$Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4; \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6; \\ x_1 + x_3 \leq 2. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	9	$Z = x_1 - 3x_2 + x_3 \rightarrow \min$ $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -2; \\ 2x_2 + 4x_3 \leq 7. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

ТЕМА 4. МЕТОД ШТУЧНОГО БАЗИСУ

Приклад 4.1. Знайти $Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 \rightarrow \max$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 380; \\ x_3 \geq 9. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 4}).$$

Розв'язання. Застосуємо для розв'язання задачі симплекс-метод. Для цього спочатку приведемо задачу до канонічної форми, а далі – до векторної. Канонічна форма цієї ЗЛП має вигляд

$$Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \rightarrow \max$$

при обмеженнях
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \\ x_3 - x_7 = 9. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 7}).$$

Векторна форма запису ЗЛП така:

$$Z = CX \rightarrow \max,$$

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 + x_5A_5 + x_6A_6 + x_7A_7 = B,$$

$$C = (8, 10, 0, -5, 0, 0, 0), \quad X = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7)^T.$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 450 \\ 380 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Серед записаних векторів одиничними є тільки вектори A_5 й A_6 . Оскільки у тривимірному просторі базис має складатися з трьох одиничних векторів, то ще один одиничний вектор можна одержати, ввівши в третє обмеження з коефіцієнтом +1 штучну змінну x_8 , якій відповідає одиничний вектор

тор $A_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тепер можна розглянути розширену ЗЛП (M -задача):

$$Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 - Mx_8 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \\ x_3 - x_7 + x_8 = 9. \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 8})$$

На відміну від додаткових змінних, штучна змінна x_8 має в цільовій функції Z коефіцієнт “ $-M$ ” (задача на max), де M – дуже велике додатне число. У розширеній задачі базисними змінними є змінні x_5, x_6, x_8 , інші змінні – вільні. Запишемо початковий опорний план задачі:

$$X_0 = (0, 0, 0, 0, 450, 380, 0, 9).$$

При цьому

$$Z = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 + 0 \cdot 0 - M \cdot 9 = -9M.$$

Складемо першу симплексну таблицю задачі. Вона матиме такий вигляд:

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	8	10	0	-5	0	0	0	-M	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
1	A_5	0	450	2	3	4	2	1	0	0	0	112,5
2	A_6	0	380	3	2	1	2	0	1	0	0	380
3	A_8	-M	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	9
$m+1$	$Z_j - C_j$		0	-8	-10	0	5	0	0	0	0	
$m+2$			-9M	0	0	-M	0	0	0	+M	0	

Обчисливши оцінки першого опорного плану, одержимо $Z_0 = 0 - 9M$, $Z_1 - C_1 = -8$, $Z_2 - C_2 = -10$, $Z_4 - C_4 = 0 - M$ та ін. Видно, що значення оцінок складаються з двох частин, одна з яких містить M , а інша – просте число. Тому в ряд $m+1$ записуємо просте число, а в ряд $m+2$ – число з коефіцієнтом M .

Оцінки першого плану не задовольняють умову оптимальності. Тому потрібен перехід до нового опорного плану. Для такого переходу необхідно реалізувати черговий крок алгоритму симплекс-методу. Розв’язуючим сто-

впцем буде третій стовпець з оцінкою $(-M)$, оскільки це число є найбільшим за модулем. Подальше розв'язання задачі подане у вигляді таких симплексних таблиць:

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	8	10	0	-5	0	0	0	-M	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
1	A_5	0	414	2	3	0	2	1	0	4	4	138
2	A_6	0	371	3	2	0	2	0	1	1	-1	185,5
3	A_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	-
$m+1$	$Z_j - C_j$		0	-8	-10	0	5	0	0	0	0	-
$m+2$			0	0	0	0	0	0	0	0	+M	-

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	8	10	0	-5	0	0	0	-M	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
1	A_2	10	138	2/3	1	0	2/3	1/3	0	4/3	-4/3	207
2	A_6	0	93	5/3	0	0	2/3	-2/3	1	-5/3	5/3	57
3	A_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	-
$m+1$	$Z_j - C_j$		1380	-4/3	0	0	35/3	10/3	0	40/3	-40/3	-
$m+2$			0	0	0	0	0	0	0	0	+M	-

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	8	10	0	-5	0	0	0	-M	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
1	A_2	10	100	0	1	0	2/5	3/5	-2/5	2	-2	-
2	A_1	8	57	1	0	0	2/5	-2/5	3/5	-1	1	-
3	A_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	-
$m+1$	$Z_j - C_j$		1456	0	0	0	61/5	14/5	4/5	12	-12	-
$m+2$			0	0	0	0	0	0	0	0	+M	-

Оптимальним планом задачі є вектор $X^* = (57, 100, 9, 0, 0, 0, 0, 0)$.

При цьому $Z_{\max} = 1456$.

Завдання до теми 4

Для свого варіанта вихідних даних розв'язати задачу методом штучного базису. Варіант вибирати за останньою цифрою номера залікової книжки.

Варіант	Задача	Варіант	Задача
0	$Z = -2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 = 3; \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 6; \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$	5	$Z = x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6; \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
1	$Z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 \leq 150; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 600; \\ 3x_1 + 4x_3 = 400; \\ 3x_2 + 5x_4 = 500. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	6	$Z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 9; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 7. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
2	$Z = 5x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6; \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 1. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	7	$Z = 12x_1 + 27x_2 + 6x_3 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 14; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6; \\ 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 \geq 22. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
3	$Z = x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 9; \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	8	$Z = -2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 - 2x_3 \leq 5; \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 3. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
4	$Z = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	9	$Z = -x_1 + x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 3; \\ -2x_1 + x_2 \geq 2; \\ x_1 + x_2 \leq 1. \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$

ТЕМА 5. ДВОЇСТА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Приклад 5.1. Скласти задачу, двоїсту такій задачі:

$$\begin{array}{l} Z = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ \text{при обмеженнях} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 \geq 1; \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24; \\ x_1 - x_2 \leq 3; \\ x_1 + x_2 \geq 5. \end{array} \right. \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. 1) Оскільки вихідна задача на максимізацію, то приведемо всі нерівності системи обмежень до виду " \leq ", для чого обидві частини першої й четвертої нерівностей помножимо на (-1) . Одержимо:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 \leq -1; \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24; \\ x_1 - x_2 \leq 3; \\ -x_1 - x_2 \leq -5. \end{array} \right.$$

2) Складемо розширену матрицю системи:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 24 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & Z \end{pmatrix}.$$

3) Знайдемо матрицю A'_1 , транспоновану до A :

$$A'_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 24 & 3 & -5 & F \end{pmatrix}.$$

4) Сформулюємо двоїсту задачу:

$$\begin{array}{l} F = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \rightarrow \min \\ \text{при обмеженнях} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -1; \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \geq 2. \end{array} \right.$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_4 \geq 0.$$

Приклад 5.2. Знайти оптимальний план двоїстої ЗЛП, попередньо розв'язавши пряму ЗЛП (див. приклад 3.1):

$$Z = x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$$

при обмеженнях
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1; \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2; \quad x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, 3). \\ 3x_1 + x_3 \leq 5. \end{cases}$$

Двоїста задача:
$$F = y_1 + 2y_2 + 5y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \leq 1; \\ -y_1 + 2y_2 \leq -1; \quad y_j \geq 0 \quad (j=1, 2, 3). \\ y_1 - y_2 + y_3 \leq -3. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язування прямої ЗЛП методом симплекса було наведено у прикладі 3.1.

Остання симплексна таблиця мала такий вигляд:

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	1	-1	-3	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_3	-3	4	0	0	1	2	1	0
2	A_2	-1	11/3	0	1	0	-1/3	1/3	2/3
3	A_1	1	1/3	1	0	0	-2/3	-1/3	1/3
$m+1$	$Z_j - C_j$		-46/3	0	0	0	-19/3	-11/3	-1/3

Оптимальний план при цьому був таким: $X = (x_1 = 1/3, x_2 = 11/3, x_3 = 4, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0)$, $Z_{\min} = -46/3$. Отже, необхідно знайти оптимальний план двоїстої задачі. Згідно з першою теоремою двоїстості $Y^* = \bar{C}_{\text{баз}} D^{-1}$ та з урахуванням того, що $\bar{C}_{\text{баз}} = (-3; -1; 1)$ (див. стовпець $C_{\text{баз}}$ наведеної симплексної

таблиці), а $D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ (див. на стовпці A_4, A_5, A_6 наведеної симплекс-

ної таблиці. У першій симплексній таблиці цими стовпцями визначалася одинична матриця), оптимальний план двоїстої задачі матиме вигляд

$$Y^* = (-3; -1; 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19/3 \\ -11/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

При цьому: $F_{\max} = y_1^* + 2y_2^* + 5y_3^* = -\frac{19}{3} + 2 \cdot \left(-\frac{11}{3}\right) + 5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{46}{3},$

$$Z_{\min} = F_{\max}.$$

Приклад 5.3. Вихідна задача:

$$Z = 3x_1 - x_3 + 12x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_1 - 2x_2 \quad \quad + x_4 = 2. \end{cases} \quad x_j \geq 0; j = \overline{1,4}.$$

Двоїста задача:

$$F = y_1 + 2y_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 \leq 3; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 \leq 0; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} -y_1 \leq -1; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 12. \end{cases} \quad (4)$$

$$y_j \geq 0; j = \overline{1,2}.$$

Розв'язання. Розв'яжемо цю задачу графічно (рис. 5.1).

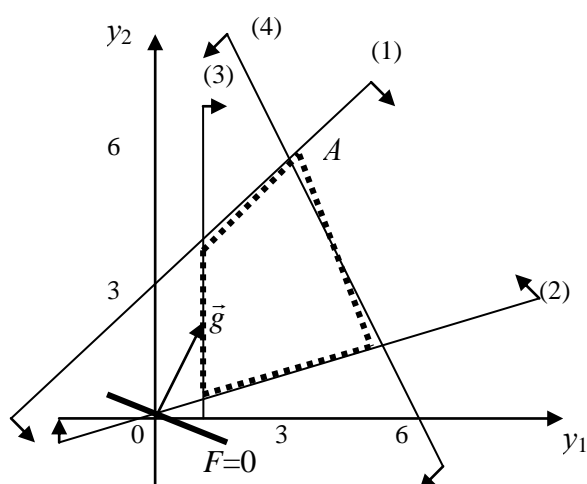


Рисунок 5.1 – Розв'язок двоїстої задачі прикладу 5.3 графічним методом

Цільова функція $F(\vec{Y})$ досягає максимального значення на лінії рівня,

що проходить через точку A : $\begin{cases} -y_1 + y_2 = 3, \\ 2y_1 + y_2 = 12, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 3, \\ y_2 = 6. \end{cases}$

Оптимальний вектор двоїстої задачі $\vec{Y}_{\text{opt}} = (3; 6)$. Позначимо його компоненти $y_1^0 = 3; y_2^0 = 6$ та знайдемо $\max F(\vec{Y}_{\text{opt}}) = y_1^0 + 2y_2^0 = 3 + 12 = 15$.

Маючи розв'язок двоїстої задачі, знайдемо розв'язок вихідної задачі за другою теоремою двоїстості. Для визначення оптимального вектора вихідної задачі $\vec{X}_{\text{opt}} = (x_1^0; x_2^0; x_3^0; x_4^0)$ за другою теоремою складемо умови доповнювальної нежорсткості:

$$1) \ x_j^0 \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^0 - c_j \right) = 0, \ j = \overline{1, n}:$$

$$\begin{cases} x_1^0 (-y_1^0 + y_2^0 - 3) = 0, \\ x_2^0 (y_1^0 - 2y_2^0) = 0, \\ x_3^0 (y_1^0 - 1) = 0, \\ x_4^0 (2y_1^0 + y_2^0 - 12) = 0. \end{cases}$$

$$2) \ y_i^0 \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 - b_i \right) = 0, \ i = \overline{1, m}:$$

$$\begin{cases} y_1^0 (-x_1^0 + x_2^0 - x_3^0 + 2x_4^0 - 1) = 0; \\ y_2^0 (x_1^0 - 2x_2^0 + x_4^0 - 2) = 0, \end{cases}$$

оскільки $y_1^0 \neq 0, y_2^0 \neq 0$ за отриманим розв'язком двоїстої задачі, то

$$\begin{cases} -x_1^0 + x_2^0 - x_3^0 + 2x_4^0 - 1 = 0; \\ x_1^0 - 2x_2^0 + x_4^0 - 2 = 0. \end{cases}$$

Підставимо відомі значення $y_1^0 = 3; y_2^0 = 6$ в рівняння першої умови доповнювальної нежорсткості та отримаємо такі значення:

$$\begin{cases} x_1^0 \cdot 0 = 0, \\ x_2^0 \cdot (-3) = 0, \\ x_3^0 \cdot 2 = 0, \\ x_4^0 \cdot 0 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^0 \neq 0, \\ x_2^0 = 0, \\ x_3^0 = 0, \\ x_4^0 \neq 0. \end{cases}$$

Врахуємо в другій умові доповнювальної нежорсткості, що оптимальний вектор вихідної задачі має тільки дві ненульові компоненти:

$$\begin{cases} -x_1^0 + 2x_4^0 - 1 = 0; \\ x_1^0 + x_4^0 - 2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^0 = 1, \\ x_4^0 = 1. \end{cases}$$

Таким чином, $\vec{X}_{\text{opt}} = (1; 0; 0; 1)$. Значення цільової функції:

$\min Z(\vec{X}_{\text{opt}}) = 3x_1^0 - x_3^0 + 12x_4^0 = 15$. Оскільки $\min Z(\vec{X}_{\text{opt}}) = \max F(\vec{Y}_{\text{opt}}) = 15$, то виконується перша теорема двоїстості.

Завдання до теми 5

А. Для поданої ЗЛП скласти двоїсту задачу. Розв'язати одну із задач симплекс–методом і визначити оптимальний план іншої задачі. Варіант вибирати за останньою цифрою номера залікової книжки.

Варіант	Задача	Варіант	Задача
0	$Z = -30x_1 + 10x_2 \rightarrow \max ;$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \geq -2; \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3. \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$	5	$Z = 5x_1 + 12x_2 - 4x_3 \rightarrow \max ;$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$
1	$Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max ;$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 50; \\ 3x_1 + x_3 \geq 15; \\ x_1 + 4x_2 \leq 40. \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$	6	$Z = -x_1 + x_2 \rightarrow \min ;$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 4; \\ x_1 + 2x_2 \geq 2; \\ x_1 + x_2 \leq 6. \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,2})$
2	$Z = -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \rightarrow \min ;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq -4; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6. \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$	7	$Z = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max ;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5; \\ x_1 + x_2 \geq 3; \\ 2x_1 + x_2 \leq 8. \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,2})$
3	$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max ;$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 30; \\ x_1 + x_2 = 6; \\ 2x_1 + x_2 \geq 10. \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,2})$	8	$Z = 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \min ;$ $\begin{cases} -x_2 + 4x_3 \geq 1; \\ -x_1 + 5x_2 \leq 1; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9. \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$
4	$Z = 5x_1 + 2x_2 \rightarrow \min ;$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 8; \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 20; \\ 3x_1 + x_2 \geq 6. \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,2})$	9	$Z = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \rightarrow \max ;$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 2; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1. \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$

Б. Для поданої ЗЛП скласти двоїсту задачу і розв'язати її графічно. Визначити оптимальний план прямої задачі, застосувавши другу теорему двоїстості.

Варіант	Задача	Варіант	Задача
0	$Z = 2x_1 + 4x_2 + 24x_3 + 6x_4 \rightarrow \min ;$ $\begin{cases} x_1 - 3x_3 + x_4 \leq -2; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq -2. \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4})$	5	$Z = -x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max ;$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq -2. \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$
1	$Z = 8x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max ;$ $\begin{cases} 4x_1 + x_3 + x_4 = 16; \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4})$	6	$Z = 8x_1 + 8x_2 + x_3 \rightarrow \min ;$ $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 \geq 1; \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \geq 3. \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$
2	$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \min ;$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -3; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$	7	$Z = x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \max ;$ $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$
3	$Z = 9x_1 + 8x_2 + 10x_3 \rightarrow \max ;$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 4; \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 6. \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$	8	$Z = 14x_1 + 15x_2 - 24x_3 \rightarrow \min ;$ $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 4x_3 \geq 1; \\ -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 \leq -3. \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$
4	$Z = -x_1 + 8x_2 + 20x_3 + 6x_4 \rightarrow \min ;$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 \leq 2; \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \geq 1. \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4})$	9	$Z = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \rightarrow \max ;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$

ТЕМА 6. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

Приклад 6.1. Знайти оптимальний план перевезень вантажу зі складів a_i в магазини b_j . Вартість перевезення однієї одиниці вантажу зі складу a_i в магазин b_j наведено в таблиці:

$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	230	420	650	400
300		5	1	2	3
200		6	3	7	1
500		4	5	3	2
700		2	4	6	8

Розв’язок. 1) Знаходимо клітину з найменшою вартістю перевезень і поставимо в неї найбільш можливу кількість перевезень. Оскільки $c_{12} = c_{24} = 1$, але $x_{12} = 300$, а $x_{24} = 200$, отже, найбільше з можливих перевезень $x_{12} = 300$. Тепер постачальник a_i повністю вичерпав свої запаси, й надалі в перший рядок нічого не заносимо (заштриховуємо):

$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	230	420	650	400
300		5	1 300	2	3
200		6	3	7	1
500		4	5	3	2
700		2	4	6	8

2) Знаходимо наступну клітину з мінімальною вартістю: $c_{24} = 1$, і заносимо в неї $x_{24} = 200$. Тепер другий постачальник повністю вичерпав свої запаси – заштриховуємо другий рядок:

$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	230	420	650	400
300		5	1 300	2	3
200		6	3	7	1 200
500		4	5	3	2
700		2	4	6	8

3) Далі діємо аналогічно: $c_{41} = c_{34} = 2$, $x_{34} = 200$ (тому що споживач b_4 уже одержав 200 у.о. вантажу від постачальника a_2); а $x_{41} = 230$. Тому заповнюємо $x_{41} = 230$ – перший споживач повністю одержав вантаж, отже, заштриховуємо перший стовпець:

$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	230	420	650	400
300		<div>5</div>	<div>1 300</div>	<div>2</div>	<div>3</div>
200		<div>6</div>	<div>3</div>	<div>7</div>	<div>1 200</div>
500		<div>4</div>	<div>5</div>	<div>3</div>	<div>2</div>
700		<div>2 230</div>	<div>4</div>	<div>6</div>	<div>8</div>

4) Серед тих клітин, що залишилися незаповненими й незаштригованими, обираємо з найменшою вартістю: $c_{34} = 2$. Поставимо в неї перевезення $x_{34} = 200$. Тепер споживач b_4 одержав увесь необхідний вантаж, тому заштриховуємо четвертий стовпець:

$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	230	420	650	400
300		<div>5</div>	<div>1 300</div>	<div>2</div>	<div>3</div>
200		<div>6</div>	<div>3</div>	<div>7</div>	<div>1 200</div>
500		<div>4</div>	<div>5</div>	<div>3</div>	<div>2 200</div>
700		<div>2 230</div>	<div>4</div>	<div>6</div>	<div>8</div>

5) Тепер у клітину $c_{33} = 3$ ставимо перевезення $x_{33} = 300$, тоді повністю вичерпані запаси третього постачальника (заштриховуємо третій рядок):

$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	230	420	650	400
300		5 /	1 300	2 /	3 /
200		6 /	3 /	7 /	1 200
500		4 /	5 /	3 300	2 200
700		2 230	4	6	8 /

б) Далі у клітину $c_{42} = 4$ ставимо перевезення $x_{42} = 120$, щоб повністю задовольнити вимоги другого споживача, а потім в $c_{43} = 6$ ставимо перевезення $x_{43} = 350$:

$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	230	420	650	400
300		5 /	1 300	2 /	3 /
200		6 /	3 /	7 /	1 200
500		4 /	5 /	3 300	2 200
700		2 230	4 120	6 350	8 /

Тепер підсумуємо перевезення за горизонтальними і вертикальними рядками в останній таблиці. Одержимо рівні значення запасів і потреб, тобто система обмежень виконується. Перевезення, які відповідають заповненим клітинам називаються *базисними*, інші, значення яких дорівнюють «0», – *вільними*. Таким чином, отримали вартість перевезень при цьому розподілі перевезень – *початковий опорний план*:

$$Z = 300 \cdot 1 + 300 \cdot 3 + 200 \cdot 2 + 230 \cdot 2 + 120 \cdot 4 + 350 \cdot 6 = 4840 \text{ у.о.}$$

Далі застосуємо *метод потенціалів*. Складемо рівності для базисних (заповнених) клітин:

$$\begin{cases} U_1 + V_1 = 1, & (1,2) \\ U_2 + V_4 = 1, & (2,4) \\ U_3 + V_3 = 3, & (3,3) \\ U_3 + V_4 = 2, & (3,4) \\ U_4 + V_1 = 2, & (4,1) \\ U_4 + V_2 = 4, & (4,2) \\ U_4 + V_3 = 6. & (4,3) \end{cases} \quad (6.1)$$

Оскільки невідомих величин більше, ніж рівнянь у системі (6.1), припустимо, що $U_4 = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} (4,1) &\Rightarrow V_1 = 2, \\ (4,2) &\Rightarrow V_2 = 4, \\ (4,3) &\Rightarrow V_3 = 6, \\ (1,2) &\Rightarrow U_1 = -3, \\ (3,3) &\Rightarrow U_3 = -3, \\ (3,4) &\Rightarrow V_4 = 5, \\ (2,4) &\Rightarrow U_2 = -4. \end{aligned} \quad (6.2)$$

$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	230	420	650	400	U_i
300		5	1 300	2	3	-3
200		6	3	7	1 200	-4
500		4	5	3 300	2 200	-3
700		2 230	4 120	6 350	8	0
V_j		2	4	6	5	

Перевіримо умову оптимальності у вільних клітинах:

(1,1)	$U_1 + V_1 \leq c_{11}$	$-3 + 2 < 5$
(1,3)	$U_1 + V_3 \leq c_{13}$	$-3 + 6 = 3 > 2$ – не виконується
(1,4)	$U_1 + V_4 \leq c_{14}$	$-3 + 5 < 3$
(2,1)	$U_2 + V_1 \leq c_{21}$	$-4 + 2 < 6$
(2,2)	$U_2 + V_2 \leq c_{22}$	$-4 + 4 < 3$
(2,3)	$U_2 + V_3 \leq c_{23}$	$-4 + 6 < 7$
(3,1)	$U_3 + V_1 \leq c_{31}$	$-3 + 2 < 4$
(3,2)	$U_3 + V_2 \leq c_{32}$	$-3 + 4 < 5$
(3,4)	$U_3 + V_4 \leq c_{34}$	$0 + 5 < 8$
(4,4)	$U_4 + V_4 \leq c_{44}$	

Оскільки в одній клітині умова оптимальності плану не виконується, то потрібне поліпшення плану – *перекидання по циклу*. Починаємо цикл з клітини (1,3), тому що в ній не виконується умова оптимальності плану:

$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	230	420	650	400	U_i
300	5	5	-1 300 → +	2	3	-3
200	6	6	3 ↑	7	1 200	-4
500	4	4	5	3 ↓ 300	2 200	-3
700	2 230	2 230	4 120 +	6 350 -	8	0
V_j		2	4	6	5	

$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	230	420	650	400	U_i
300	5	5	1	2 300	3	-3
200	6	6	3	7	1 200	-4
500	4	4	5	3 300	2 200	-3
700	2 230	2 230	4 420	6 50	8	0
V_j		2	4	6	5	

Перевіряємо отриманий план на оптимальність, обчисливши потенціали за базисними клітинами і перевіряючи умову оптимальності у вільних клітинах. Останній план виявився *оптимальним* (значення виявились меншими ніж на попередньому початковому плані), отже, вартість перевезень:

$$Z = 300 \cdot 2 + 200 \cdot 1 + 300 \cdot 3 + 200 \cdot 2 + 230 \cdot 2 + 420 \cdot 4 + 50 \cdot 6 = 4560 \text{ у.о.}$$

Таким чином, *розв'язком* транспортної задачі буде такий план перевезень:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 300 & 200 \\ 230 & 420 & 50 & 0 \end{pmatrix} \text{ при цьому } Z_{\min} = 4540 \text{ у.о.}$$

Завдання до теми 6

Розв'язати транспортну задачу. Початковий опорний план побудувати методом мінімальної вартості.

Варіант 0					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	40	25	50	35
55		5	5	1	2
60		1	4	2	1
35		1	2	3	2

Варіант 5					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	50	35	50	65
70		5	2	1	0
80		4	5	4	1
45		2	1	4	3

| | | | | | |

Варіант 1					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	35	45	25	45
40		2	3	0	2
60		3	4	1	4
50		1	3	1	5

Варіант 6					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	15	25	25	85
70		1	1	1	0
20		2	3	5	1
60		3	2	4	5

| | | | | | |

Варіант 2					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	20	65	20	50
40		3	1	2	1
55		1	4	1	3
60		1	2	2	3

Варіант 7					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	35	25	60	30
50		3	4	4	3
50		4	4	2	1
50		3	2	1	2

| | | | | | |

Варіант 3					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	40	20	50	40
70		2	3	4	6
45		3	6	6	6
35		4	5	5	7

Варіант 8					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	40	20	60	30
55		6	4	4	4
50		1	2	0	2
45		5	3	4	2

| | | | | | |

Варіант 4					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	40	40	50	70
8		4	0	3	2
60		1	1	2	0
60		5	1	6	5

Варіант 9					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	60	25	70	45
90		2	4	1	3
75		3	4	3	5
35		6	6	4	5

ТЕМА 7. ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

7.1. Метод Гоморі

Алгоритм розв'язання задачі цілочислового програмування (ЗЦП) такий.

Крок 1. Знаходять розв'язок послабленої ЗЛП симплекс-методом. Якщо серед елементів оптимального плану ЗЛП немає дробових чисел, то цей план є оптимальним і для ЗЦП. Оптимальний план ЗЛП при цьому називається умовно-оптимальним для ЗЦП.

Крок 2. Якщо в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то серед них вибирають те, що має найбільшу дробову частину. На його основі (на основі елементів відповідного рядка останньої симплексної таблиці, в якому міститься це значення) формується додаткове обмеження Гоморі:

$$\sum_{j=1}^n \{a_{ij}\} x_j \geq \{b_i\}, \quad (7.1)$$

де $\{ \}$ – дробова частина числа: $\{q\} = q - [q]$ (тут $[\]$ – ціла частина числа).

Крок 3. Сформоване додаткове обмеження (7.1) після зведення його до канонічного вигляду та введення базисного елемента приєднують до останньої симплексної таблиці, що містить умовно-оптимальний план. Отриману при цьому розширену задачу розв'язують, а далі перевіряють її розв'язок на цілочисельність. Якщо він не цілочисловий, то виконують перехід до кроку 2 цього алгоритму. Так діють доти, доки не буде знайдено цілочислового розв'язку або доведено, що ЗЦП не має допустимих розв'язків у множині цілих чисел.

Приклад 7.1. Знайти $Z = x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1; \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2; \\ 3x_1 + x_3 \leq 5. \end{cases} \quad x_j \geq 0 \ (j=1,2,3), \ x_j \in \mathbb{Z}.$$

Розв'язання. В результаті розв'язання послабленої ЗЛП можна отримати таку останню симплексну таблицю:

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	1	-1	-3	0	0	0	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_3	-3	4	0	0	1	2	1	0	
2	A_2	-1	11/3	0	1	0	-1/3	1/3	2/3	
3	A_1	1	1/3	1	0	0	-2/3	-1/3	1/3	
$m+1$	$Z_j - C_j$		-46/3	0	0	0	-19/3	-11/3	-1/3	

Нецілими є такі компоненти опорного плану: $x_2 = \frac{11}{3}$, $x_3 = \frac{1}{3}$. Отже,

$$\{b_2\} = b_2 - [b_2] = \frac{11}{3} - \left[\frac{11}{3}\right] = \frac{11}{3} - \frac{9}{3} = \frac{2}{3}. \quad \{b_1\} = \frac{1}{3} - \left[\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Очевидно, що $\{b_2\} > \{b_1\}$, тому додаткове обмеження (7.1) у цьому випадку буде сформоване для $i = 2$. З урахуванням того, що

$$\left\{-\frac{1}{3}\right\} = -\frac{1}{3} - \left[-\frac{1}{3}\right] = -\frac{1}{3} - (-1) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3},$$

це обмеження можна подати у вигляді

$$\frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6 \geq \frac{2}{3}.$$

Зведемо його до канонічного вигляду з виділенням базисної змінної:

$$\frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6 - x_7 + x_8 = \frac{2}{3}.$$

Далі включимо його в останню симплексну таблицю та виконаємо один крок її перерахунку. Результати виконання цих дій можна оцінити з таких симплексних таблиць:

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план	1	-1	-3	0	0	0	0	M	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
1	A_3	-3	4	0	0	1	2	1	0	0	0	
2	A_2	-1	11/3	0	1	0	-1/3	1/3	2/3	0	0	11/2
3	A_1	1	1/3	1	0	0	-2/3	-1/3	1/3	0	0	1
4	A_8	M	2/3	0	0	0	2/3	1/3	2/3	-1	1	1
$m+1$	$Z_j - C_j$		-46/3	0	0	0	-19/3	-11/3	-1/3	0	0	
$m+2$	M		2/3	0	0	0	2/3	1/3	2/3	-1	0	

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план	1	-1	-3	0	0	0	0	М
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
1	A_3	-3	4	0	0	1	2	1	0	0	0
2	A_2	-1	3	0	1	0	-1	0	0	1	-1
3	A_1	1	0	1	0	0	-1	-1/2	0	1/2	-1/2
4	A_6	М	1	0	0	0	1	1/2	1	-3/2	3/2
$m+1$	$Z_j - C_j$		-15	0	0	0	-6	-7/2	0	-1/2	1/2
$m+2$	М		0	0	0	0	0	0	0	0	-1

Як виходить з останньої симплексної таблиці, умова оптимальності опорного плану виконується. При цьому всі $x_j \in Z$. Отже, оптимальний розв'язок початкової задачі такий:

$$X^* = (0; 3; 4; 0; 0; 1),$$

тобто $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 4$. При цьому $Z_{\min} = -15$.

7.2. Метод „гілок і меж”

Алгоритм використання методу „гілок і меж” для ЗЦП буде таким.

Крок 1. За допомогою симплексного методу розв'язують послаблену ЗЦП. Інакше кажучи, на першому кроці знаходять умовно-оптимальний план ЗЦП. Якщо деяка компонента x_j^* опорного плану останньої симплексної таблиці, тобто компонента умовно-оптимального плану ЗЦП, є дробовою, то можна стверджувати, що в інтервалі $(\lfloor x_j^* \rfloor; \lfloor x_j^* \rfloor + 1)$ цілих значень взагалі немає.

Крок 2. Для однієї з дробових компонент x_j^* опорного плану останньої симплексної таблиці формують додаткові обмеження:

$$x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor, \quad x_j \geq \lfloor x_j^* \rfloor + 1. \quad (7.2)$$

Крок 3. Початкову задачу цілочислового програмування розбивають на дві задачі з урахуванням умов цілочисельності змінних та додаткових обмежень (7.2). При цьому задачі матимуть такий вигляд.

$$\text{Перша задача. Знайти} \quad Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min) \quad (7.3)$$

при обмеженнях
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{ \leq, \geq, = \} b_i, \quad (i = \overline{1, m}), \quad (7.4)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad (7.5)$$

$$x_j \in Z, \quad (7.6)$$

$$x_j \leq [x_j^*] \quad (7.7)$$

Друга задача. Знайти
$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min) \quad (7.8)$$

при обмеженнях
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{ \leq, \geq, = \} b_i, \quad (i = \overline{1, m}), \quad (7.9)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad (7.10)$$

$$x_j \in Z, \quad (7.11)$$

$$x_j \geq [x_j^*] + 1. \quad (7.12)$$

Крок 4. Далі симплекс-методом розв'язують послаблені задачі (7.3)–(7.7) і (7.8)–(7.12), тобто відповідні ЗЛП без обмежень (7.6) і (7.11). Якщо знайдені оптимальні плани цих задач задовольняють умову цілочисельності, то ці плани визначають розв'язок початкової ЗЦП. Інакше пошук розв'язку задачі триває. Для подальшого розгалуження беруть задачу з більшим значенням цільової функції, якщо йдеться про задачу на max, чи з меншим значенням цільової функції, якщо йдеться про задачу на min. Подалі розгалуження виконують доти, доки не буде встановлено неможливість поліпшення розв'язку. Отриманий план – оптимальний.

Зауваження. Розв'язування цілочислових завдань методом «гілок і меж» можна значно прискорити, приєднуючи обмеження вигляду (7.7) і (7.12) до останньої симплекс-таблиці не початкової ЗЦП, а відповідних задач.

Приклад 7.2. Розв'язати ЗЦП прикладу 7.1 методом «гілок і меж».

Розв'язання. У результаті розв'язування послабленої ЗЛП з останньої симплексної таблиці виходить, що нецілими є такі компоненти опорного плану:

$x_2 = \frac{11}{3}, x_3 = \frac{1}{3}$. Для формування додаткових обмежень вигляду

$x_j \leq [x_j^*], x_j \geq [x_j^*] + 1$ виберемо компоненту $x_2 = \frac{11}{3}$. При цьому вказані обме-

ження матимуть вигляд: $x_2 \leq [x_2^*] = \left[\frac{11}{3}\right] = 3; x_2 \geq [x_2^*] + 1 = \left[\frac{11}{3}\right] + 1 = 4$.

З урахуванням цього початкова ЗЦП розіб'ється на такі дві задачі.

Перша задача. Знайти $Z = x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$

$$\text{при обмеженнях} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1; \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2; \\ 3x_1 + x_3 \leq 5; \\ x_2 \leq 3. \end{cases} \quad x_j \geq 0 (j=1,2,3), x_j \in Z.$$

Друга задача. Знайти $Z = x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$

$$\text{при обмеженнях} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1; \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2; \\ 3x_1 + x_3 \leq 5; \\ x_2 \geq 4. \end{cases} \quad x_j \geq 0 (j=1,2,3), x_j \in Z.$$

Далі кожен із задач зводять до канонічної форми й розв'язують як послаблену задачу симплекс-методом або методом штучного базису.

Канонічна форма першої задачі має вигляд: знайти

$$\begin{aligned} & Z = x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow \min \\ & \text{при обмеженнях} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2; \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5; \\ x_2 + x_7 = 3. \end{cases} \quad x_j \geq 0 (j=\overline{1,7}), x_j \in Z. \end{aligned}$$

Канонічна форма другої задачі має вигляд: знайти

$$Z = x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$$

при обмеженнях
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2; \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5; \\ x_2 - x_7 + x_8 = 4. \end{cases} \quad x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,8}), \ x_j \in \mathbb{Z}.$$

Результат розв'язання першої задачі такий: $Z_{\min} = -15$, $X^* = (0; 3; 4; 0; 0; 1)$.

Результат розв'язання другої задачі такий: $Z_{\min} = -9$, $X^* = (1; 4; 2; 1; 0; 0)$.

У цьому випадку розв'язки обох задач цілочислові. Однак у першій задачі Z_{\min} є меншим, ніж у другій. Тому розв'язок початкової задачі такий: $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 4$. При цьому $Z_{\min} = -15$.

Завдання до теми 7

Літак завантажується зброєю двох типів. Значення маси m_i , об'єму V_i і вартості R_i однієї одиниці зброї i -го типу подано в табл. 7.1.

Таблиця 7.1

i	m_i	V_i	R_i
1	$N + 2$	$16 - N$	5
2	$11 - N$	$N + 1$	N

Максимальна маса й об'єм зброї, які можуть бути завантажені в літак, становлять $m = 100 + 2N$, $V = 124 - N$ відповідно. Необхідно *визначити* кількість одиниць зброї кожного типу, щоб ефективність її застосування була максимальною (ефективність застосування зброї прямо пропорційна її вартості). Математичну модель задачі розв'язати методом Гоморі й методом «гілок і меж». Отримані результати порівняти.

У табл. 7.1 значення N залежно від варіанта може змінюватися в межах $N = 1 \div 10$. Варіант вибрати за останньою цифрою номера студента в журналі групи (для номерів, що закінчуються на нуль, $N = 10$).

ТЕМА 8. ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

8.1. Графічний метод розв'язування задач нелінійного програмування

Суть графічного методу для задач нелінійного програмування (ЗНП) у такому:

- ✓ будують ОДР, що визначається обмеженнями;
- ✓ будують лінії рівня, які визначаються цільовою функцією задачі;
- ✓ установлюють точки, підозрілі на екстремум. Такими точками є точки, які належать і графіковій цільовій функції, і ОДР, і які в досить малій околиці інших точок ОДР не містять;
- ✓ перебирають значення цільової функції у знайдених точках і серед них вибирають ті, у яких досягається найбільше й найменше значення. В окремих випадках на основі застосування достатніх умов екстремуму визначаються точки екстремуму.

Приклад 8.1. Знайти мінімальне значення сепарабельної функції

$$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \text{ при обмеженнях } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1; \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12. \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Область допустимих розв'язків (ОДР) являє собою чотирикутник $ABCD$ (рис. 8.1).

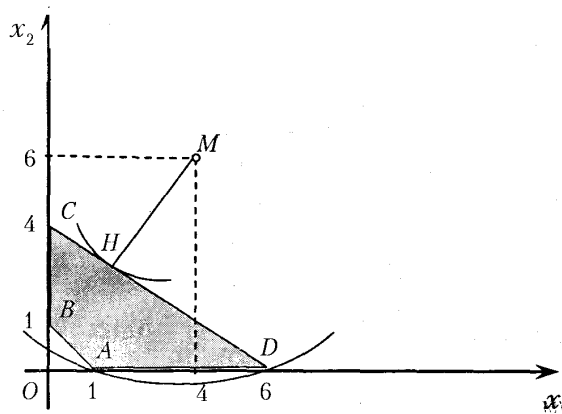


Рисунок 8.1 – ОДР для прикладу 8.1

Якщо прийняти $Z = Q$ ($Q > 0$), то одержимо, що цільова функція визначає геометричне місце точок, яким є коло $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 = Q$. Зі зменшенням (збільшенням) Q (квадрата радіуса) значення функції Z відповідно зменшуються (збільшуються).

Для визначення точок, підозрілих на екстремум, з точки M як з центра будують кола різних радіусів і відзначають точки, які належать і графіку цільової функції, і ОДР та які в досить малому своєму околі інших точок ОДР не містять. Очевидно, що такими точками є H , A та D . Далі встановлюють координати цих точок і значення цільової функції в них. Очевидно, що $A(1, 0)$, $D(6, 0)$. Значення цільової функції в цих точках дорівнюють: $Z(A) = (1 - 4)^2 + (0 - 6)^2 = 45$, $Z(D) = (6 - 4)^2 + (0 - 6)^2 = 40$.

Оскільки $Z(A) > Z(D)$, то точка $A(1, 0)$ є *точкою глобального максимуму*.

Для обчислення координат точки H необхідно розв'язати таку систему

рівнянь:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12; \\ \frac{x_1 - 4}{2} = \frac{x_2 - 6}{3}. \end{cases}$$

У результаті її розв'язання визначено координати точки $H: H\left(\frac{24}{13}; \frac{36}{13}\right)$. При

цьому $Z(D) = \frac{196}{13}$. Отже, знайдена точка H є *точкою мінімуму*.

Приклад 8.2. Знайти максимальне та мінімальне значення функції $Z = x_1^2 + x_2^2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \leq 4; \\ x_1 + x_2 \geq 5; \\ x_1 \leq 7; \\ x_2 \leq 6. \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. У цьому випадку ОДР не є опуклою й складається з двох окремих частин (див. рис. 8.2).

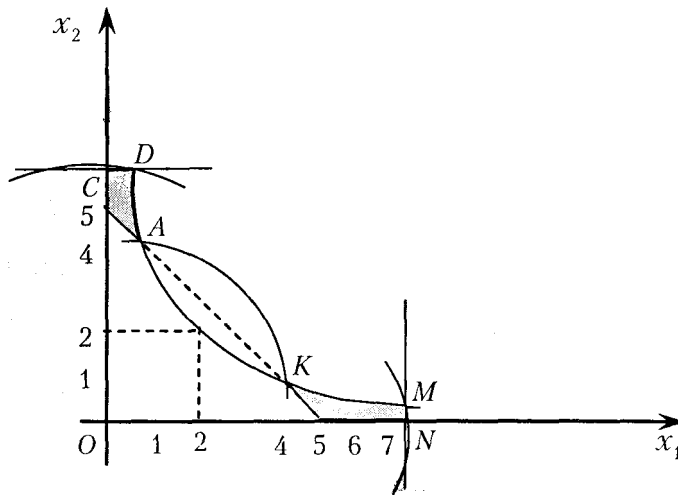


Рисунок 8.2 – ОДР для прикладу 8.2

Мінімальне значення функції $Z = 17$ досягається в точках $A(1, 4)$ і $K(4, 1)$.

Функція Z має два локальних максимуми: у точці $D\left(\frac{2}{3}; 6\right)$ та в точці

$M\left(7; \frac{4}{7}\right)$. Оскільки $Z(D) = \frac{328}{9}$, а $Z(M) = \frac{2417}{49}$ та $Z(M) > Z(D)$, то точкою глобального максимуму є точка M .

8.2. Метод множників Лагранжа

Метод множників Лагранжа базується на функції Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda[b - \varphi(x_1, x_2)],$$

де λ – постійний множник (множник Лагранжа); $f(x_1, x_2)$ – цільова функція, значення якої треба знайти; $\varphi(x_1, x_2) = b$ – додаткове обмеження. Розглянемо алгоритм цього методу на прикладі.

Приклад 8.3. Знайти умовний екстремум функції $f = 6 - 4x_1 - 3x_2$, якщо $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Розв'язання. 1) Складаємо функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = (6 - 4x_1 - 3x_2) + \lambda(1 - x_1^2 - x_2^2).$$

2) Формуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = -4 - 2\lambda x_1 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -3 - 2\lambda x_2 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0. \end{cases}$$

3) У результаті розв'язання системи отримуємо такі стаціонарні точки: $\lambda' = -\frac{5}{2}, x_1' = \frac{4}{5}, x_2' = \frac{3}{5}; \lambda'' = \frac{5}{2}, x_1'' = -\frac{4}{5}, x_2'' = -\frac{3}{5}$.

4) Визначаємо точки, у яких досягається екстремальне значення. Оскільки

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = -2\lambda, \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = -2\lambda, \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

то $d^2 L = -2\lambda dx_1^2 - 2\lambda dx_2^2 = -2\lambda(dx_1^2 + dx_2^2)$.

Якщо $\lambda' = -\frac{5}{2}, x_1' = \frac{4}{5}, x_2' = \frac{3}{5}$, то $d^2 L > 0$. А це означає, що в точці

$A\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$ функція f має умовний мінімум. Якщо $\lambda'' = \frac{5}{2}, x_1'' = -\frac{4}{5}, x_2'' = -\frac{3}{5}$, то

$d^2 L < 0$ й у точці $B\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$ функція f має умовний максимум. При цьому

$$f_{\min} = 1, f_{\max} = 11.$$

Приклад 8.4. Знайти точку умовного екстремуму функції $Z = x_1 x_2 + x_2 x_3$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2; \\ x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. 1) Складаємо функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \lambda_1(2 - x_1 - x_2) + \lambda_2(2 - x_2 - x_3).$$

2) Формуємо систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - \lambda_1 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + x_3 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} = x_2 - \lambda_2 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 2 - x_1 - x_2 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 2 - x_2 - x_3 = 0. \end{array} \right.$$

3) У результаті розв'язання системи отримуємо такі стаціонарні точки:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, x_1 = x_2 = x_3 = 1.$$

4) Точка $A(1,1,1)$ є точкою умовного екстремуму. При цьому $Z = 2$.

8.3. Теорема Куна – Таккера

Теорема Куна – Таккера є узагальненням класичного методу множників Лагранжа у сучасній теорії пошуку екстремуму опуклих функцій на опуклих множинах. Розглянемо застосування цієї теореми на прикладі.

Приклад 8.5. Знайти $Z = -x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max$ при обмеженнях

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \geq 2; \\ 2x_1 + x_2 \leq 8; \quad x_1, x_2 \geq 0. \\ x_1 + x_2 \leq 6. \end{array} \right.$$

Розв'язання. Застосування графічного методу розв'язування ЗНП дозволяє отримати точку $H(0,8;0,4)$, що є підозрілою на екстремум (рис. 8.3). Для того щоб довести, що в цій точці дійсно досягається максимальне значення функції Z , необхідно перевірити виконання умов Куна – Таккера в ній. З цією метою сконструюємо функцію Лагранжа та знайдемо всі часткові похідні останньої.

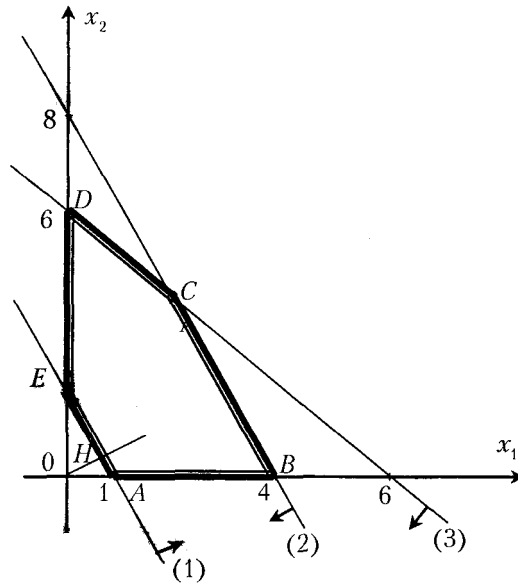


Рисунок 8.3 – ОДР для прикладу 8.5

$$L(X, \lambda) = -x_1^2 - x_2^2 + \lambda_1(2x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2(8 - 2x_1 - x_2) + \lambda_3(6 - x_1 - x_2);$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3; \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 2x_1 + x_2 - 2; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 8 - 2x_1 - x_2; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 6 - x_1 - x_2.$$

Враховуючи отримані вирази часткових похідних, а також те, що $X^{(0)} = (0,8; 0,4)$, а $\lambda^{(0)}$ є невідомим, неважко зрозуміти, що

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \right)_{X^{(0)}, \lambda^{(0)}} = 2 \cdot 0,8 + 0,4 - 2 = 0, \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \right)_{X^{(0)}, \lambda^{(0)}} = 8 - 2 \cdot 0,8 - 0,4 = 6 > 0,$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} \right)_{X^{(0)}, \lambda^{(0)}} = 6 - 0,8 - 0,4 = 4,8 > 0.$$

Тоді, з урахуванням умов Куна – Таккера, неважко зрозуміти, що $\lambda_2^{(0)} = \lambda_3^{(0)} = 0$, а $\lambda_1^{(0)}$ підлягає відшукуванню з урахуванням того, що $\lambda_1^{(0)} \geq 0$.
Для знаходження $\lambda_1^{(0)}$ визначимо

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right)_{X^{(0)}, \lambda^{(0)}} = -2 \cdot 0,8 + 2 \cdot \lambda_1^{(0)} - 2 \cdot 0 - 0 = -1,6 + 2 \cdot \lambda_1^{(0)}.$$

З останнього виразу з урахуванням локальних умов Куна – Таккера неважко зрозуміти, що $\lambda_1^{(0)} = 0,8$.

Перевірка умов при $X^{(0)} = (0,8; 0,4)$ та $\lambda^{(0)} = (0,8; 0; 0)$ вказує на їх повне виконання.

У результаті розв'язання ЗНП одержано такий вектор: $\lambda^{(0)} = (0,8; 0; 0)$, який забезпечив виконання всіх локальних умов Куна – Таккера при $X^{(0)} = (0,8; 0,4)$, тобто в точці $H(0,8; 0,4)$. Останнє свідчить про те, що точка $H(0,8; 0,4)$ є точкою, у якій досягається максимальне значення функції Z . При цьому $Z_{\max} = -0,8^2 - 0,4^2 = -0,8$.

Завдання до теми 8

8.1. Розв'язати ЗНП графічним методом. Перевірити знайдену точку на оптимальність за допомогою локальних умов Куна – Таккера.

Варіант	Задача	Варіант	Задача
0	$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2 \rightarrow \max (\min);$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10; \\ x_1 + x_2 \leq 6. \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0$	5	$Z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \max (\min);$ $\begin{cases} x_1 x_2 \geq 5; \\ x_1 + x_2 \leq 6. \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0$
1	$Z = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \max (\min);$ $\begin{cases} x_1 x_2 \geq 1; \\ x_1 + 3x_2 \leq 6; \\ x_1 \leq 3. \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0$	6	$Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \rightarrow \max (\min)$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ 2x_1 + x_2 \leq 6. \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0$
2	$Z = x_1 + x_2 \rightarrow \max (\min);$ $\begin{cases} x_1 x_2 \geq 1; \\ x_2 \leq \sqrt{x_1}; \\ x_1 \leq 4. \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0$	7	$Z = x_1 + x_2 \rightarrow \max (\min);$ $\begin{cases} x_1 x_2 \geq 2; \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 16. \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0$

Варіант	Задача	Варіант	Задача
3	$Z = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max(\min);$ $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 16; \\ x_1 + 2x_2 \geq 2; \quad x_1, x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 \geq 2. \end{cases}$	8	$Z = x_1 x_2 \rightarrow \max ;$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2; \\ 2x_1 + x_2 \geq 2; \quad x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 4. \end{cases}$
4	$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7; \\ 2x_1 - x_2 \leq 8. \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$	9	$Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \max(\min);$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6; \\ 2x_1 - x_2 \leq 8. \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

8.2. Знайти умовний екстремум функції Z за допомогою методу множників Лагранжа.

Варіант	Задача	Варіант	Задача
0	$Z = 2x_1^2 + x_2^2,$ $2x_1 + 3x_2 = 5$	5	$Z = 2x_1^2 + 5x_1 + x_2^2 + 3x_2,$ $x_1 + 5x_2 = 12$
1	$Z = x_1^2 - x_2^2,$ $3x_1 + 4x_2 = 12$	6	$Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2,$ $3x_1 + 6x_2 \leq 30$
2	$Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2,$ $2x_1 - x_2 = 5$	7	$Z = 3x_1^2 + 2x_2^2,$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$
3	$Z = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2,$ $x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$	8	$Z = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3,$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$
4	$Z = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 5x_2,$ $x_1 + 3x_2 = 6$	9	$Z = 2x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_2 x_3,$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$

ТЕМА 9. ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Динамічне програмування (ДП) – метод оптимізації, пристосований до операцій, у яких процес ухвалення рішення може бути розбитий на етапи (кроки). Такі операції називаються *багатокроковими*. Початок розвитку ДП відноситься до 50-х років ХХ ст. Воно пов'язане з ім'ям американського математика Р. Беллмана. Розглянемо задачу ДП на прикладі.

Приклад 9.1. Необхідно перевезти вантаж з міста A в місто B . Дорожня мережа, що сполучає ці міста, наведена на рис. 9.1.

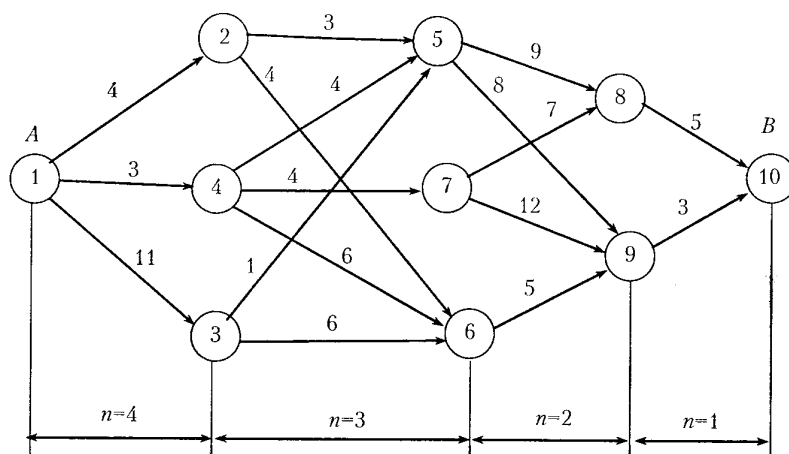


Рисунок 9.1 – Дорожня мережа

Вартість перевезення вантажу з міста s ($s = \overline{1, 9}$) в місто j ($j = \overline{2, 10}$) проставлена над відповідними дугами мережі. Необхідно знайти маршрут A і B , для якого сумарні витрати на перевезення вантажу були б найменшими.

Розв’язання. Розіб’ємо всю множину вершин (міст) на підмножини. У першу підмножину включимо початкову вершину 1. У другу – вершини, у які входять дуги, що виходять із вершини 1. У третю – вершини, в які входять дуги, що виходять із вершин другої підмножини. Таким чином, продовжуючи розбивку далі, одержимо 5 підмножин: $\{1\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{5, 6, 7\}$, $\{8, 9\}$, $\{10\}$. Очевидно, що довільний маршрут з міста 1 у місто 10 містить рівно чотири дуги, кожна з яких сполучає вершини, які належать відповідним підмножинам. Отже, процес розв’язування задачі (знаходження оптимального маршруту) розбивається на чотири етапи. На першому етапі приймається рішення, через яке місто, що належить другій підмножині, везти вантаж з міста 1. На другому етапі необхідно визначити, через яке місто третьої підмножини везти вантаж з деякого міста, що належить другій підмножині й т.ін.

Перенумеруємо етапи від кінцевої вершини мережі до початкової (рис. 9.1) і введемо позначення: n – номер кроку ($n = 1, 2, 3, 4$); $f_n(s)$ – мінімальні витрати на перевезення вантажу з міста s до кінцевого міста, якщо до кінцевого міста залишилося n кроків; $j_n(s)$ – номер міста, через яке необхідно їхати з міста s , щоб досягти $f_n(s)$; c_{sj} – вартість перевезення вантажу з міста s у місто j .

Тут всі позначення мають важливе змістовне навантаження: f визначає цільову функцію, s – стан системи (номер міста), індекс n несе динамічну інформацію про те, що з міста s до кінцевого міста залишилося n кроків.

Припустимо, що вантаж доставлений у місто 10. Отже, число кроків, що залишилися, дорівнює нулю ($n = 0$) і $f_n(s) = f_0(10) = 0$, оскільки вантаж з міста 10 везти не потрібно. Розглянемо останній крок ($n = 1$) та обчислимо для нього значення функції. Очевидно, що в місто 10 вантаж може бути доставлений або з міста 8, або з міста 9. Обчислимо витрати на перевезення для цих двох станів:

$$\begin{aligned} f_1(8) &= c_{8,10} + f_0(10) = 5 + 0 = 5, & s = 8, & j_1(8) = 10, \\ f_1(9) &= c_{9,10} + f_0(10) = 3 + 0 = 3, & s = 9, & j_1(9) = 10. \end{aligned}$$

Для того щоб здійснити розрахунок для $n = 2$, висунемо гіпотезу про місце знаходження вантажу: 1-ша гіпотеза – вантаж перебуває в місті 5, 2-га гіпотеза – вантаж перебуває в місті 6, 3-тя гіпотеза – вантаж перебуває в місті 7.

З міста 5 у місто 10 вантаж можна провезти або через місто 8, або через місто 9. Тому оптимальний маршрут з міста 5 знайдемо з виразу

$$f_2(5) = \min_j [c_{58} + f_1(8); c_{59} + f_1(9)] = \min(9 + 5, 8 + 3) = 11.$$

Тут $s = 5$ й $j_2(5) = 9$. Тобто умовно-оптимальний маршрут проходить через місто 9. Аналогічно знаходимо значення функції для $s = 6$ й $s = 7$:

$$f_2(6) = c_{69} + f_1(9) = 8, \quad f_2(7) = \min_j [c_{78} + f_1(8); c_{79} + f_1(9)] = 12.$$

Всі обчислення зручно виконувати в таблицях. Розрахунки першого [$n = 1, c_{sj} + f_0(j)$] й другого етапів розміщені в табл. 9.1 і табл. 9.2 відповідно.

Таблиця 9.1

s/j	10	$f_1(s)$	$j_1(s)$
8	5 + 0	5	10
9	3 + 0	3	10

Таблиця 9.2

s/j	8	9	$f_2(s)$	$j_2(s)$
5	9 + 5	8 + 3	11	9
6		5 + 3	8	9
7	7 + 5	12 + 3	12	8

Розрахунки для третього $[n=3, c_{sj} + f_2(j)]$ та четвертого кроків $[n=4, c_{sj} + f_3(j)]$ наведені в табл. 9.3.

Таблиця 9.3

s/j	5	6	7	$f_3(s)$	$j_3(s)$
2	$3 + 11$	$4 + 8$		12	6
3	$1 + 11$	$6 + 8$		12	5
4	$4 + 11$	$6 + 8$	$4 + 12$	14	6

Таблиця 9.4

s/j	2	3	4	$f_4(s)$	$j_4(s)$
1	$4 + 12$	$11 + 12$	$3 + 14$	16	2

Висновок: рухаючись від таблиці 9.4 до таблиці 9.1, визначимо оптимальний маршрут $\mu = (1-2-6-9-10)$, витрати на перевезення вантажу по якому становлять $f_4(1) = 4 + 4 + 5 + 3 = 16$.

Завдання до теми 9

Необхідно перевезти вантаж з міста A в місто B . Мережу доріг, що сполучають ці міста, наведено на рис. 9.2. Вартість перевезення вантажу з міста s ($s = \overline{1, 6}$) в місто j ($j = \overline{2, 7}$) проставлена над відповідними дугами мережі. Необхідно знайти маршрут між A і B , для якого сумарні витрати на перевезення вантажу були б найменшими (N – номер прізвища студента у журналі групи: $N = 1 \div 10$).

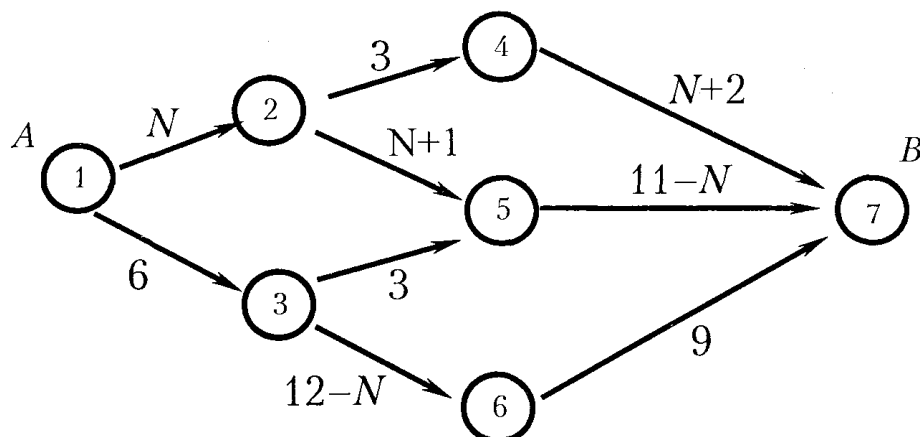


Рисунок 9.2 – Дорожня мережа

ТЕМА 10. ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ІГОР

Приклад 10.1. Визначити нижню та верхню ціни для ігор, заданих платіжними матрицями A_1 та A_2 . Встановити, яка з ігор має сідлову точку. Визначити при можливості ціну гри.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. 1)
$$\left. \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \right\} \max \min = \alpha_1 = 3$$

$$\begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 5 \end{matrix}$$

$$\min_j \max_i = \beta_1 = 4.$$

Оскільки $\alpha \neq \beta$, то ця гра не має сідлової точки, тоді ціна гри $3 \leq v \leq 4$.

2)
$$\left. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{matrix} \right\} \max \min = \alpha_2 = 2$$

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 4 & 5 \end{matrix}$$

$$\min_j \max_i = \beta_2 = 2.$$

Оскільки $\alpha = \beta$, то ця гра має сідлову точку, а ціна гри $v = 2$.

Приклад 10.2. Розв'язати матричну гру, задану матрицею

$$\left. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 5 & 9 & 8 & 10 \\ 4 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow 1 \\ \rightarrow 2 \\ \rightarrow 5 \\ \rightarrow 4 \end{matrix} \right\} \max_i \min_j = \alpha = 5$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 9 & 8 & 10 \end{matrix}$$

$$\min_j \max_i = \beta = 5.$$

Відповідь: ціна гри $v = \alpha = \beta = 5$. Сідлова точка $a_{31} = 5$. Оптимальні стратегії: гравця $A - A_3$, гравця $B - B_1$. Рішення $(A_3, B_1, 5)$.

Приклад 10.3. Розв'язати матричну гру, задану матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Перевіримо матрицю на сідлову точку:

$$\left. \begin{matrix} (1 & 4 & 3) \rightarrow 1 \\ (4 & -1 & 0) \rightarrow -1 \end{matrix} \right\} \max_i \min_j a_{ij} = \alpha = 1$$

↓ ↓ ↓

$$\left. \begin{matrix} 4 & 4 & 3 \end{matrix} \right\} \min_j \max_i = \beta = 3$$

$$\alpha = \max(1, -1) = 1, \quad \beta = \min(4, 4, 3) = 3, \quad 1 \leq v \leq 3.$$

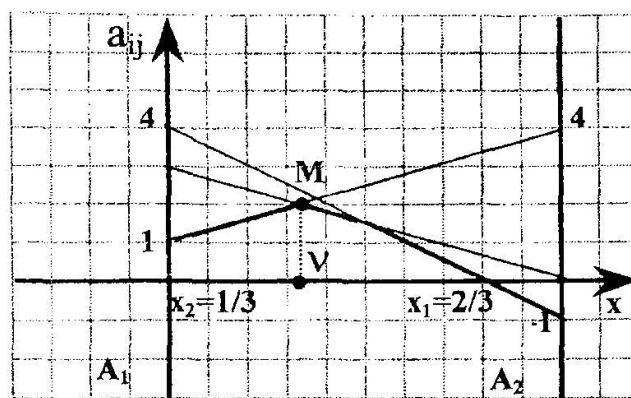


Рисунок 10.1 – Чисті стратегії гравця A для прикладу 10.3

Сідлової точки немає. Гра ведеться в змішаних стратегіях. Оскільки матриця має розмір 2×3 , пошук оптимальних змішаних стратегій починаємо з гравця A – у нього дві чисті стратегії. Будуємо прямі $1 - 4$, $4 - (-1)$, $3 - 0$ (рис. 9.1). Жирно виділена лінія, що визначає нижню межу гри. Точка з найбільшою ординатою на цій лінії – M . Вона лежить на перетині прямих $1 - 4$ і $3 - 0$, які відповідають стратегіям B_1 і B_3 гравця B . Можна відразу зробити висновок, що у гравця B активними будуть стратегії B_1 і B_3 , тобто ймовірність їх застосування буде відмінною від нуля, а ймовірність застосування стратегії B_2 дорівнює

нулю ($y_1 \neq 0; y_2 = 0; y_3 \neq 0$, тобто $y_1 + y_3 = 1$). Цей висновок використовується при розв'язанні задачі для гравця B .

Для гравця A складемо систему рівнянь, що відображає той факт, що він отримає свій середній виграш при використанні гравцем B як першої, так і третьої стратегій:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = v; B_1 \\ 3x_1 = v; B_3 \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання: $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 3x_1; \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}; \begin{cases} 2x_2 = x_1; \\ 3x_2 = 1 \end{cases}; x_2 = 1/3; x_1 = 2/3; v = 2.$

Для гравця B система рівнянь (з урахуванням $y_2 = 0$):

$$\begin{cases} y_1 + 3y_3 = v; A_1 \\ 4y_1 = v; A_2 \\ y_1 + y_3 = 1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y_1 + 3y_3 = 2; \\ 4y_1 = 2; \\ y_1 + y_3 = 1; \end{cases} \quad y_1 = 1/2; y_3 = 1/2; v = 2.$$

На рис. 10.1 можна перевірити цей результат за клітинами.

Відповідь: для гравця A : $\vec{X} = (2/3; 1/3)$, для гравця B : $\vec{Y} = (1/2; 0; 1/2)$, ціна гри $v = 2$.

Приклад 10.4. Розв'язати матричну гру, задану матрицею $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow 3 \\ \rightarrow 2 \\ \rightarrow 0 \\ \rightarrow -1 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}} \right\} \max_i \min_j a_{ij} = \alpha = 3$$

$$\downarrow \downarrow$$

$$4 \quad 6 \left. \vphantom{4 \quad 6} \right\} \min_j \max_i a_{ij} = \beta = 4.$$

Знайдемо $\alpha = \max(3; 2; 0; -1) = 3$, $\beta = \min(4; 6) = 4$, $3 \leq v \leq 4$.

Сідлової точки немає. Оскільки матриця має розмір 4×2 , розв'язок шукаємо спочатку для гравця B . Зробимо рисунок, щоб визначити *верхню межу гри* (рис. 9.2), оскільки гравець B вибирає з максимальних програшів мінімальний (мінімаксна стратегія).

Жирною лінією виділена *верхня межа гри* M – точка з \min ординатою, яка відповідає ціні гри. Активними стратегіями гравця A будуть перша та четверта. Це означає, що ймовірність вибору другої та третьої стратегій дорівнюють нулю, тобто $x_2 = 0$; $x_3 = 0$.

Розв'язок для гравця B отримаємо з такої системи:

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 = v; A_1 \\ -y_1 + 6y_2 = v; A_4 \Rightarrow y_1 = 3/8; y_2 = 5/8; v = 27/8. \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

Вірогідність вибору першої стратегії гравцем B : $y_1 = 3/8$; другої – $y_2 = 5/8$, ціни гри $v = 27/8 = 3\frac{3}{8}$. Тепер знайдемо x_1, x_4 з будь-яких двох рівнянь з трьох можливих:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_4 = 27/8 \\ 3x_1 + 6x_4 = 27/8 \\ x_1 + x_4 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 7/8; x_4 = 1/8. \\ \vec{X} = (7/8; 0; 0; 1/8). \end{matrix}$$

Відповідь: для гравця A : $\vec{X} = (7/8; 0; 0; 1/8)$, для гравця B : $\vec{Y} = (3/8; 5/8)$, ціна гри $v = 3\frac{3}{8}$.

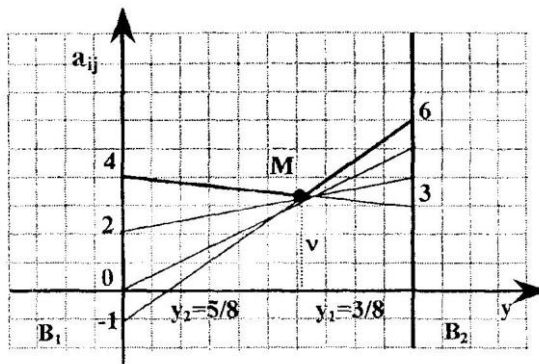


Рисунок 10.2 – Чисті стратегії гравця A для прикладу 9.4

Завдання до теми 10

Розв'язати дві матричні гри.

Варіант	Задача	Варіант	Задача
0	$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$	5	$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$
1	$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -7 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$	6	$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 6 \\ 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -10 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
2	$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	7	$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 8 & 7 \\ 6 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 & -1 \\ -3 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & -7 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$	8	$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
4	$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \\ 7 & 8 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$	9	$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -7 & 9 \\ -2 & 4 & 6 & 8 & -10 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

ТЕМА 11. ІГРИ З ПРИРОДОЮ

Особливе місце в теорії ігор займають ігри проти природи, які ще називаються **прийняттям рішень в умовах невизначеності**. Природа хоча й робить випадкові ходи, але не є зловмисним гравцем, тому що вона не прагне зробити якнайгірше своєму супротивникові й не має розуму. Тому й прийняття рішення в такій ситуації має свої особливості. Розглянемо приклад.

Приклад 11.1. Припустимо, що планується військова операція: нанесення авіацією гравця Г1 удару по об'єкту гравця Г2 (природи). Гравець Г1 може вибрати 4 стратегії нанесення удару з 4-х сторін: С11 – з півночі, С12 – зі сходу, С13 – з півдня, С14 – із заходу. Ефективність дій авіації Г1 залежить від стратегії С2 – стану "природи" та ймовірностей $P2$ використання цих стратегій: С21 – ясно, ймовірність $P2_1$; С22 – похмуро, ймовірність $P2_2$; С23 – туман, дощ.

Кожна пара стратегій Г1 та Г2 дає результат, ефективність якого показана у табл. 11.1.

Таблиця 11.1

Спосіб дії Г1	Стратегії природи		
	С21	С22	С23
С11	0,32	0,4	0,25
С12	0,6	0,7	0,4
С13	0,8	0,65	0,2
С14	0,65	0,25	0,3

Треба забезпечити найбільш можливий виграш у найгірших умовах при різних ймовірностях $P2_j$ використання погодою Г2 стратегій С2j.

Розв'язання

1. Припустимо, що ці ймовірності відомі: $P2_1 = 0,6$; $P2_2 = 0,3$; $P2_3 = 0,1$. Тоді оцінка стратегій гравця Г1 для кожного рядка визначається за формулою:

$$G_i = \sum_{j=1}^n P2_j a_{ij}. \quad (11.1)$$

Тоді

$$G_1 = 0,6 \cdot 0,32 + 0,3 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,25 = 0,343.$$

$$G_2 = 0,6 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,4 = 0,61.$$

$$G_3 = 0,6 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,25 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,695 \text{ (max).}$$

$$G_4 = 0,6 \cdot 0,65 + 0,3 \cdot 0,25 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,495.$$

Відповідь: обирається стратегія С13: гравець Г1 повинен виконати напад з півдня.

2. Критерій Лапласа (стратегії є ймовірними) $G_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$.

$$G_1 = (0,32 + 0,4 + 0,25) / 3 = 0,323.$$

$$G_2 = (0,6 + 0,7 + 0,4) / 3 = 0,567.$$

$$G_3 = (0,8 + 0,65 + 0,2) / 3 = 0,55.$$

$$G_4 = (0,65 + 0,25 + 0,3) / 3 = 0,4.$$

Відповідь: обирається стратегія С12: гравець Г1 повинен виконати напад зі сходу.

3. Критерій Вальда. Вибираємо з табл. 11.1 рядок з мінімальними значеннями елементів, з яких обираємо максимальне значення.

min рядків:

0,25

0,4 – max

0,2

0,2

Відповідь: гравець Г1 обирає стратегію С12 – напад зі сходу.

4. Критерій Севіджа. Будуємо матрицю ризику зі значеннями елементів матриці:

$$b_{ij} = a_{ij}^{\max} - a_{ij}, \quad (11.2)$$

де a_{ij}^{\max} – максимальне значення елементів a_{ij} для j -го стовпця; a_{ij} – поточне значення коефіцієнтів a_{ij} для поточного стовпця.

Матриця ризику наведена в табл. 11.2.

Таблиця 11.2

Спосіб дії Г1	Стратегії природи			max рядків
	С21	С22	С23	
С11	0,48	0,3	0,15	0,48
С12	0,2	0	0	0,2 (min)
С13	0	0,05	0,2	0,2 (min)
С14	0,15	0,45	0,1	0,45

Відповідь: вибираємо дві рівноцінні стратегії С12 та С13.

5. Критерій Гурвіца. Розрахунок критерію виконується за формулою:

$$G_i = \chi \min a_{ij} + (1 - \chi) \max a_{ij}, \quad (11.3)$$

де $\chi = 0,5$.

Результати розрахунків за формулою (11.3) наведено в табл. 11.4.

Таблиця 11.4

Спосіб дії Г1	Мінімальне значення рядків	Максимальне значення рядків	$\chi \min \text{рядків} + (1 - \chi) \max \text{рядків}$
C11	0,25	0,4	$0,5 \cdot (0,25 + 0,4) = 0,325$
C12	0,4	0,7	$0,5 \cdot (0,4 + 0,7) = 0,55 \text{ (max)}$
C13	0,2	0,8	$0,5 \cdot (0,2 + 0,8) = 0,5$
C14	0,25	0,65	$0,5 \cdot (0,25 + 0,65) = 0,45$

Відповідь: вибираємо стратегію C12.

Завдання до теми 11

За умовами прикладу 11.1 визначити найбільш можливий виграш у найгірших умовах при різних ймовірностях $P2_j$ використання погодою Г2 стратегій C2j. Кожна пара стратегій Г1 та Г2 дає результат, ефективність якого показана у табл. 11.5.

Таблиця 11.5

Спосіб дії Г1	Стратегії природи (Г2)		
	C21	C22	C23
C11	0,32	0,05N	0,25
C12	0,022N	0,03N	0,02N
C13	0,03N	0,025N	0,2
C14	0,25N	0,25	0,3

Випадок 1. Імовірності дорівнюють $P2_1 = 0,06N$; $P2_2 = 0,03N$; $P2_3 = 0,01N$.

Випадок 2. Всі стратегії є рівноймовірними.

ТЕМА 12. ПАРНИЙ РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ

Якщо змінна y залежить від однієї змінної, то рівняння регресії є найпростішим і має назву *рівняння парної регресії*. Якщо y залежить від більше ніж однієї незалежної змінної, то така залежність має назву рівняння *множинної або багатofакторної регресії* (табл. 12.1).

Таблиця 12.1

Вид залежності	Парна регресія	Множинна регресія
лінійна	$\hat{y} = a_0 + a_1 x$	$\hat{y} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m$
квадратична	$\hat{y} = a_0 + a_1 x^2$...
гіперболічна	$\hat{y} = a_0 + a_1 / x$...
степенева	$\hat{y} = a_0 x^{a_1}$...
логарифмічна	$\hat{y} = a_0 + a_1 \ln x$...

Метод найменших квадратів (МНК) полягає у такому: невідомі параметри a_j в табл. 12.1 обираються таким чином, щоб сума квадратів відхилень емпіричних (фактичних) значень y_i від розрахункових \hat{y}_i була мінімальною

$$S = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 \rightarrow \min. \quad (12.1)$$

Необхідна умова екстремуму функції

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0, j = 1 \dots p, \quad (12.2)$$

де p – кількість параметрів у системі.

Формули (12.1), (12.2) – це загальні формули МНК, які застосовуються для знаходження параметрів будь-якого регресійного рівняння з будь-якою кількістю незалежних змінних.

Приклад 12.1. Існує залежність між змінним видобутком вугілля на одного робітника Y і потужністю шару вугілля X за даними десяти шахт ($n = 11$) (табл. 12.2).

Таблиця 12.2

Номер шахти	x	y	x^2	y^2	xy	\hat{y}
1	2	3	4	5	6	7
1	8	5	64	25	40	5,378
2	11	10	121	100	110	8,426
3	12	10	144	100	120	9,442
4	9	7	81	49	63	6,394
5	8	5	64	25	40	5,378
6	8	6	64	36	48	5,378
7	9	6	81	36	54	6,394
8	9	5	81	25	45	6,394
9	8	6	64	36	48	5,378
10	12	8	144	64	96	9,442
Усього	94	68	908	496	664	68
У середньому	9,4	6,8	90,8	49,6	66,4	6,8

Необхідно визначити параметри рівняння регресії, довірчі інтервали для $M_x(Y)$, y_0^* , β_1 , σ^2 , перевірити значущість рівняння регресії, обчислити коефіцієнт детермінації.

Розв'язання. 1. Будемо вважати, що залежність між змінними лінійна:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x \text{ або } \hat{y} - \bar{y} = b_1 (x - \bar{x}).$$

Допоміжні розрахунки для характеристик моделі подано в табл. 12.2.

Тоді

$$\bar{x} = \frac{94}{10} = 9,4; \quad \bar{y} = \frac{68}{10} = 6,8;$$

$$K_{xy} = \frac{664}{10} - 9,4 \cdot 6,8 = 2,48; \quad s_x^2 = \frac{908}{10} - 9,4^2 = 2,44; \quad b_1 = \frac{2,48}{2,44} = 1,016.$$

Отже,

$$\hat{y} - 6,8 = 1,016 \cdot (x - 9,4); \quad \hat{y} = -2,75 + 1,016x.$$

Відзначимо, що вільний член рівняння ($b_0 = -2,75$) не має реального змісту.

Обчислимо коефіцієнт кореляції r :

$$r = \frac{10 \cdot 664 - 94 \cdot 68}{\sqrt{10 \cdot 908 - 94^2} \cdot \sqrt{10 \cdot 496 - 68^2}} = 0,866,$$

тобто зв'язок між змінними досить тісний.

2. Визначимо довірчі інтервали для $M_x(Y)$, y_0^* , β_1 , σ^2 . Допоміжні розрахунки для характеристик моделі подано в табл. 12.3.

Таблиця 12.3

Номер шахти	x	y	\hat{y}	$(x - \bar{x})^2$	$(\hat{y} - y)^2$
1	8	5	5,378	1,96	0,14288
2	11	10	8,426	2,56	2,47748
3	12	10	9,442	6,76	0,31136
4	9	7	6,394	0,16	0,36724
5	8	5	5,378	1,96	0,14288
6	8	6	5,378	1,96	0,38688
7	9	6	6,394	0,16	0,15524
8	9	5	6,394	0,16	1,94324
9	8	6	5,378	1,96	0,38688
10	12	8	9,442	6,76	2,07936
Усього	94	68	68	24,4	8,39345

За отриманими даними знайдемо такі величини:

1) довірчий інтервал для $M_x(Y)$ при $X_0 = 8$:

$$a) \hat{y}_{X_0} = \hat{y}_0 = -2,75 + 1,016 \cdot 8 = 5,38;$$

$$б) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 24,4;$$

$$\hat{y}_i = -2,75 + 1,016 \cdot x_i \text{ (знайти 10 значень } \hat{y}_i \text{):}$$

$$\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 = 8,39,$$

тоді

$$s^2 = \frac{8,39}{10 - 2} = 1,049;$$

$$s_{\hat{y}_{x_0}}^2 = 1,049 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{(8-9,4)^2}{24,4} \right) = 0,189;$$

$$s_{\hat{y}_{x_0}} = \sqrt{0,189} = 0,435;$$

в) за таблицею t -розподілу при $\alpha = 0,05$ і $k = 8$ отримуємо, що $t_{0,95; 8} = 2,31$, і тоді

$$5,38 - 2,31 \cdot 0,435 \leq M_x(Y) \leq 5,38 + 2,31 \cdot 0,435;$$

$$4,38 \leq M_x(Y) \leq 6,38;$$

2) знайдемо довірчий інтервал для y_0^* при $\alpha = 0,05$ і $k = 8$:

$$s_{y_0^*}^2 = 0,189 + 1,049 = 1,238;$$

$$s_{y_0^*} = 1,113,$$

підставивши значення, маємо:

$$5,38 - 2,31 \cdot 1,113 \leq y_0^* \leq 5,38 + 2,31 \cdot 1,113;$$

$$2,81 \leq y_0^* \leq 7,95;$$

3) знайдемо довірчий інтервал для β_1 при $\alpha = 0,05$ і $k = 8$:

$$1,016 - 2,31 \cdot \frac{\sqrt{1,049}}{\sqrt{24,4}} \leq \beta_1 \leq 1,016 + 2,31 \cdot \frac{\sqrt{1,049}}{\sqrt{24,4}};$$

$$0,537 \leq \beta_1 \leq 1,495.$$

Це означає, що при зміні потужності шару вугілля на 1 м добовий ви-
добуток вугілля буде змінюватися від 0,537 до 1,495 т;

4) знайдемо довірчий інтервал для σ^2 при $\alpha = 0,05$ і $k = 8$:

$$\chi_{\alpha/2; k}^2 = \chi_{0,025; 8}^2 = 17,53;$$

$$\chi_{1-\alpha/2; k} = \chi_{0,975; 8} = 2,18,$$

після підстановки числових значень, маємо:

$$\frac{10 \cdot 1,049}{17,53} \leq \sigma^2 \leq \frac{10 \cdot 1,049}{2,18};$$

$$0,598 \leq \sigma^2 \leq 4,81;$$

$$0,773 \leq \sigma \leq 2,19.$$

Таким чином, з надійністю 0,95 дисперсія збурювання знаходиться в межах від 0,598 до 4,81, а її стандартне відхилення – від 0,773 до 2,19 т.

3. Перевіримо значущість рівняння регресії в прикладі 12.1 на рівні значущості $\alpha = 0,05$; $k = 8$:

$$t_{0,95; 8} = 2,31,$$

$$t = \frac{1,016}{\sqrt{1,049}} \sqrt{24,4} = 4,9.$$

Оскільки $t = 4,9 > 2,31 = t_{0,95;8}$, то коефіцієнт регресії b_1 й рівняння регресії значущі.

4. За даними прикладу 12.1 обчислимо коефіцієнт детермінації:

$$Q_R = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = 25,21;$$

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 33,6;$$

$$R^2 = \frac{25,21}{33,6} = 0,75.$$

У прикладі 12.1 було знайдено $r = 0,886$; $r^2 = (0,886)^2 = 0,75$.

Висновок: зміна залежної змінної (змінного видобутку вугілля) на 75 % зумовлена потужністю шару вугілля.

Завдання до теми 12

Для поданих значень ціни на товар, грн, та обсягу пропозиції (попиту), тис. грн, побудувати лінійні однофакторні економетричні моделі й навести їх графіки, розрахувати їх характеристики, зробити висновки щодо їх

адекватності, розрахувати прогностні значення, якщо ціна на товар становить 7,2.

Варіант 0

X	5,4	7,6	2,3	5,9	11,0	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Y	13,7	18,0	6,2	15,5	24,1	24,8	25,0	13,0	8,1	6,7

Варіант 1

X	5,5	7,1	2,6	5,4	10,0	11,6	12,4	2,9	2,4	1,6
Y	17,7	14,0	4,2	12,5	29,1	25,8	22,0	9,0	4,1	3,7

Варіант 2

X	13,7	18,0	6,2	15,5	24,1	24,8	25,0	13,0	8,1	6,7
Y	5,4	7,6	2,3	5,9	11,0	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6

Варіант 3

X	5,1	7,4	2,3	5,9	11,0	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Y	16,7	13,0	7,2	14,5	20,1	21,8	23,0	11,0	7,1	4,7

Варіант 4

X	5,4	7,6	2,3	5,9	11,0	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Y	13,7	18,0	6,2	15,5	24,1	24,8	25,0	13,0	8,1	6,7

Варіант 5

X	15,4	17,6	12,3	15,9	11,0	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Y	13,7	18,0	16,2	19,5	14,1	14,8	15,0	9,0	5,1	3,7

Варіант 6

X	5,1	7,2	2,4	5,1	11,2	12,2	10,1	4,8	2,3	1,5
Y	18,7	28,0	16,2	25,5	34,1	44,2	35,0	23,0	8,1	10,7

Варіант 7

X	5,4	7,6	2,3	5,9	11,0	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Y	11,7	14,0	5,2	13,5	20,1	21,8	24,0	12,0	7,1	6,7

Варіант 8

X	5,3	7,4	2,4	5,6	11,1	12,2	10,3	4,8	2,3	1,5
Y	33,1	38,0	16,2	40,5	54,1	64,8	55,0	53,0	15,1	10,7

Варіант 9

X	5,4	7,6	2,3	5,9	11,0	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Y	3,7	8,0	1,2	3,5	9,1	8,8	9,2	3,0	1,1	0,7

ТЕМА 13. МНОЖИННИЙ РЕГРЕЙНИЙ АНАЛІЗ

Нехай Y – залежна змінна. Тоді змінні фактори, від яких залежить величина Y , будемо позначати: X_1, X_2, \dots, X_p . Припустимо, що зв'язок між цими змінними лінійний, тоді *модель множинної регресії* має вигляд

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad (13.1)$$

де $i = \overline{1, n}$; y_i – залежна змінна; x_i – i -те спостереження відповідних факторів.

Приклад 13.1. Є дані про змінний видобуток вугілля на одного робітника Y , потужність шару X_1 і рівень механізації робіт X_2 . Припускаючи, що між цими змінними існує лінійна залежність, знайти рівняння множинної регресії.

i	x_{i1}	x_{i2}	y_i	x_{i1}^2	x_{i2}^2	y_i^2	$x_{i1}x_{i2}$	$x_{i1}y_i$	$x_{i2}y_i$	\tilde{y}_i	$e_i^2 = (\tilde{y}_i - y_i)^2$
1	8	5	5	64	25	25	40	40	25	5,13	0,016
2	11	8	10	121	64	100	88	110	80	8,79	1,464
3	12	8	10	144	64	100	96	120	80	9,64	1,127
4	9	5	7	81	25	49	45	63	35	5,98	1,038
5	8	7	5	64	49	25	56	40	35	5,86	0,741
6	8	8	6	64	64	36	64	48	48	6,23	0,052
7	9	6	6	81	36	36	54	54	36	6,35	0,121
8	9	4	5	81	16	25	36	45	20	5,61	0,377
9	8	5	6	64	25	36	40	48	30	5,13	0,762
10	12	7	8	144	49	64	84	96	56	9,28	1,631
Σ	94	63	68	908	417	496	603	664	445	—	6,329

Розв'язання.

Позначимо

$$Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ \dots \\ 8 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 1 & 11 & 8 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 12 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 8 & 11 & \dots & 12 \\ 5 & 8 & \dots & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 1 & 11 & 8 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 12 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 94 & 63 \\ 94 & 908 & 603 \\ 63 & 603 & 417 \end{pmatrix}.$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 8 & 11 & \dots & 12 \\ 5 & 8 & \dots & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ \dots \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 664 \\ 445 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо $(X'X)^{-1}$:1) $\Delta(X'X) = 3738 \neq 0$.2) транспонуємо $X'X$:

$$(X'X)' = X'X.$$

3) Визначимо приєднану матрицю $(X'X)^s$:

$$(X'X)^s = \begin{pmatrix} 15027 & -1209 & -522 \\ -1209 & 201 & -108 \\ -522 & -108 & 244 \end{pmatrix}.$$

4) Знаходимо обернену матрицю:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{\Delta} (X'X)^s$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{3738} \begin{pmatrix} 15027 & -1209 & -522 \\ -1209 & 201 & -108 \\ -522 & -108 & 244 \end{pmatrix}.$$

За формулою $b = (X'X)^{-1} X'Y$:

$$b = \frac{1}{3738} \begin{pmatrix} 15027 & -1209 & -522 \\ -1209 & 201 & -108 \\ -522 & -108 & 244 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 68 \\ 664 \\ 445 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,54 \\ 0,854 \\ 0,364 \end{pmatrix}.$$

Рівняння регресії має вигляд:

$$\tilde{y} = (1 \quad x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} -3,54 \\ 0,854 \\ 0,364 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{y} = -3,54 + 0,854x_1 + 0,367x_2.$$

Це рівняння показує, що при збільшенні потужності шару X_1 ($X_2 = \text{const}$) на 1 м, видобуток вугілля збільшується на 0,854 т, а при збільшенні тільки рівня механізації X_2 ($X_1 = \text{const}$) на 1%, видобуток вугілля збільшується на 0,367 т.

Приклад 13.2. За даними прикладу 13.1 порівняти роздільний вплив на видобуток вугілля двох факторів: потужності шару й рівня механізації.

Раніше було обчислено

$$\bar{x}_1 = 9,4; \quad \bar{y} = 6,8; \quad S_{x_1} = 1,56.$$

Обчислимо додатково стандартизовані коефіцієнти регресії b'_j та еластичності E'_j :

$$\bar{x}_2 = 6,3; \quad S_{x_2} = 1,42; \quad S_y = 1,83; \quad b_1 = 0,854; \quad b_2 = 0,367.$$

$$b'_1 = 0,854 \frac{1,56}{1,83} = 0,728; \quad b'_2 = 0,367 \frac{1,42}{1,83} = 0,285;$$

$$E'_1 = 0,854 \frac{9,4}{6,8} = 1,18; \quad E'_2 = 0,367 \frac{6,3}{6,8} = 0,34.$$

Висновок: за обома показниками на видобуток вугілля більше впливає фактор потужності шару, ніж фактор рівня механізації.

Приклад 13.3. За даними прикладу 13.1 знайти довірчі інтервали.

1. Знайдемо довірчий інтервал для індивідуального значення y_0^* :

$$s_{y_0^*}^2 = s_{\tilde{y}_0}^2 + s^2 = (0,951)^2 + (0,951)^2 \cdot 0,187 = (1,036)^2;$$

$$s_{y_0^*} = 1,036.$$

$$5,49 - 2,36 \cdot 1,036 \leq y_0^* \leq 5,49 + 2,36 \cdot 1,036;$$

$$3,05 \leq y_0^* \leq 7,93.$$

2. Знайдемо довірчий інтервал і перевіримо значущість коефіцієнтів регресії b_1, b_2 .

$$s_{b_1} = 0,951 \cdot \sqrt{\frac{1}{3738}} 201 = 0,221; \quad s_{b_2} = 0,951 \cdot \sqrt{\frac{1}{3738}} 244 = 0,243.$$

Обчислимо t -вибіркове:

$$t_{b_1} = \frac{0,854}{0,221} = 3,81; \quad t_{0,95;7} = 2,36.$$

Оскільки $t_{b_1} > 2,36$, то коефіцієнт b_1 значущий на рівні $\alpha = 0,05$.

$$t_{b_2} = \frac{0,367}{0,243} = 1,51.$$

Оскільки $t_{b_2} < 2,36$, то коефіцієнт b_2 не значущий на рівні $\alpha = 0,05$.

Значить, знаходити довірчий інтервал для b_2 не має реального сенсу.

Довірчий інтервал для β_1 має вигляд:

$$0,854 - 2,36 \cdot 0,21 \leq \beta_1 \leq 0,854 + 2,36 \cdot 0,21;$$

$$0,332 \leq \beta_1 \leq 1,376.$$

3. Знайдемо довірчий інтервал для дисперсії σ^2 на рівні $\alpha = 0,05$:

$$\chi_{0,025;7}^2 = 16,01; \quad \chi_{0,975;7}^2 = 1,69.$$

$$\frac{10 \cdot 0,904}{16,01} \leq \sigma^2 \leq \frac{10 \cdot 0,904}{1,69};$$

$$0,565 \leq \sigma^2 \leq 5,349;$$

$$0,751 \leq \sigma \leq 2,313.$$

Приклад 13.4. За даними прикладу 13.1 визначити коефіцієнт детермінації R^2 і перевірити значущість рівняння регресії на рівні 0,05.

$$Y'Y = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 496.$$

$$b'X'Y = \begin{pmatrix} -3,54 & 0,854 & 0,367 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 68 \\ 664 \\ 445 \end{pmatrix} = 489,65.$$

$$\bar{y} = 6,8.$$

Коефіцієнт детермінації має вигляд: $R^2 = \frac{489,65 - 10 \cdot (6,8)^2}{496 - 10 \cdot (6,8)^2} = 0,811$.

Визначимо F -статистику Фішера: $F = \frac{0,811 \cdot (10 - 2 - 1)}{(1 - 0,811)2} = 15$.

За таблицею *Фішера-Снедекора* знаходимо $F_{0,05; 2; 7} = 4,74$.

Оскільки $F > F_{0,05; 2; 7}$; $15 > 4,74$, то рівняння регресії значуще. Значущість означає, що включені в модель параметри x_1 та x_2 досить добре визначають регресійну модель.

Завдання до теми 13

Для свого варіанта вихідних даних побудувати лінійну двофакторну модель $Y_i = f(X_1, X_2)$, оцінити параметри моделі й перевірити їхню статистичну значущість за допомогою критерію Ст'юдента, перевірити значущість моделі за критерієм Фішера, знайти коефіцієнт детермінації та множинної кореляції, розрахувати коефіцієнти парної кореляції між факторними ознаками. Зробити висновки щодо адекватності моделі. Варіант вибирається за номером прізвища студента у журналі групи.

Таблиця 13.1

i	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}
1	2,2	5,4	10	18	38	47	20,9	52,3	19,4	30	46,7	34,3
2	3,1	3,2	14	12	16	26	14,6	33	15,4	17	30,3	23,7
3	5,4	5,6	15	28	34	36	28,1	42,4	36,3	28	39,7	30,8
4	6,1	7,8	12,8	40	52	51	36	57,5	44	38	51,3	36,9
5	7,8	3,5	25	28	10	10	26,5	16,7	40,3	11	20,5	15,4
6	5,6	6,8	12,1	35	44	44	30,8	50,3	41,5	31	46,8	34,7
7	4,2	4,8	15	23	29	34	22,4	38,9	26,6	23	38,5	25,6
8	4,4	5,1	14,7	24	31	36	22,1	42,7	30,5	26	41,1	27,4
9	2,2	3,2	13,1	9	19	30	12,8	34,6	12	21	36,5	22,9
10	3,1	4,6	17	19	29	37	19,5	44,3	22,2	28	38,9	28,1

Таблиця 13.2

i	X_1	X_2	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}	Y_{15}	Y_{16}	Y_{17}	Y_{18}	Y_{19}	Y_{20}
1	3,2	5,8	9	11,2	37	22	17,2	17,3	33,5	10,2	30	4
2	5,3	6,9	15	12,7	37	23	10,1	26,7	42,2	13,3	43	8
3	6,7	8,1	20	12,4	40	26	9,6	31,5	52,4	16,4	51	8
4	2,2	3,2	8	14,9	78	16	13,9	4,9	13,9	9	18	6
5	8,8	9,6	25	17,3	41	26	1,7	42	65,3	20,2	62	9
6	4,3	5,6	13	13,6	34	20	9,8	18	33,2	12,9	33	7
7	6,9	9,3	20	11,2	44	32	9,5	38	61,7	15,9	55	6
8	2,1	3,5	9	14,7	30	14	14,8	6	16,3	10	19	5
9	8,9	12	24	8,1	50	38	6,1	53	81,2	18,6	72	5
10	10,1	15	26	3,7	60	44	3,8	65	102,8	20	88	4

Таблиця 13.3

i	X_1	X_2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	Y_{24}	Y_{25}
1	2,3	3,5	4,8	9	15	21	10
2	7,2	8,3	26	16,5	43,1	52	43
3	2,5	4,3	6,1	7,1	16,1	27	15
4	3,7	6,9	12,5	9,1	26,1	39	31
5	6,1	7,1	21,1	15,5	36,4	43	35
6	2,5	5,7	7,2	8,9	19	33	21
7	5,3	7,2	17,4	13,5	33	42	36
8	2,1	5,6	6	5,5	17	32	19
9	4,5	7,1	15,7	11,6	30	42	32
10	6,2	8,6	21,2	13,9	40	50	43

ТЕМА 14. УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Економетрична модель, в якій спостерігається явище гетероскедастичності, є узагальненою моделлю і для оцінювання її параметрів необхідно використовувати не метод найменших квадратів (МНК), а узагальнений метод найменших квадратів (метод Ейткена, або скорочено УМНК).

Ідея УМНК полягає у знаходженні оцінок матриці параметрів b моделі з використанням додатково визначеної діагональної матриці S , за допомогою якої коригується вхідна інформація.

Приклад 14.1. Використовуючи дані про залежність між змінним видобутком вугілля на одного робітника Y і товщиною ґрунту X , де спостерігається гетероскедастичність, дати оцінки параметрів моделі згідно з методом Ейткена.

i	X	Y
1	8	5
2	11	10
3	12	10
4	9	7
5	8	5
6	8	6
7	9	6
8	9	5
9	8	6
10	12	8

Розв'язання.

1. Ідентифікація змінних:

Y – змінний видобуток вугілля на одного робітника, залежна змінна;

X – товщина ґрунту, незалежна змінна.

Тоді загальний вигляд економетричної моделі такий:

$$Y = a_0 + a_1 X + u; \quad \tilde{Y} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 X; \quad u = Y - \tilde{Y}.$$

2. Згідно з першою гіпотезою припустимо, що в діагональній матриці S елементи λ_i пропорційні до зміни пояснювальної змінної x_i , тобто $\lambda_i = \frac{1}{x_i}$ (x_i – товщина ґрунту за i -м спостереженням). Тоді обернена матриця до S записується у вигляді (вище та нижче головної діагоналі нулі):

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0 & & & & & & & & \\ & 0 & 0,091 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 0,083 & 0 & & & & & \\ & & & 0 & 0,111 & 0 & & & & \\ & & & & 0 & 0,125 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & 0,125 & 0 & & \\ & & & & & & 0 & 0,111 & 0 & \\ & & & & & & & 0 & 0,111 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0,125 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 0,083 \end{pmatrix}.$$

3. Знайдемо матрицю, транспоновану до матриці пояснювальної змінної:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 11 & 12 & 9 & 8 & 8 & 9 & 9 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

4. Обчислимо добутки матриць:

$$X'S^{-1} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,091 & 0,083 & 0,111 & 0,125 & 0,125 & 0,111 & 0,111 & 0,125 & 0,083 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X'S^{-1}X = \begin{pmatrix} 1,09 & 10 \\ 10 & 94 \end{pmatrix}.$$

5. Визначимо обернену матрицю:

$$(X'S^{-1}X)^{-1} = \begin{pmatrix} 36,93 & -3,93 \\ -3,93 & 0,43 \end{pmatrix}.$$

6. Обчислимо матрицю $X'S^{-1}Y$:

$$X'S^{-1}Y = \begin{pmatrix} 7,159 \\ 68 \end{pmatrix}.$$

7. Оцінімо параметри моделі за методом Ейткена:

$$\tilde{A} = (X'S^{-1}X)^{-1} X'S^{-1}Y = \begin{pmatrix} 36,93 & -3,93 \\ -3,93 & 0,43 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7,159 \\ 68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,77 \\ 1,018 \end{pmatrix}.$$

8. Економетрична модель видобутку вугілля на одного робітника має вигляд:

$$\tilde{Y} = -2,77 + 1,018 \cdot X.$$

9. Економічний аналіз характеристик моделі приводить до такого:

а) коефіцієнт детермінації $R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \tilde{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{8,393}{33,6} = 0,75$, а це

означає, що 75 % видобутку вугілля залежить від товщини ґрунту;

б) коефіцієнт кореляції $R = \sqrt{R^2} = 0,866$, що свідчить про досить тісний зв'язок між товщиною ґрунту та видобутком вугілля.

Завдання до теми 14

За вихідними даними теми 12 необхідно оцінити параметри економетричної моделі згідно з методом Ейткена, порівняти їх з оцінками звичайного МНК, зробити висновки щодо адекватності моделі.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Розкрийте предмет та основні поняття економіко-математичного моделювання.
2. Розкажіть про історію розвитку економіко-математичних методів.
3. Охарактеризуйте сучасний стан економіко-математичного моделювання.
4. Наведіть класифікацію економіко-математичних моделей.
5. Які існують етапи економіко-математичного моделювання?
6. Охарактеризуйте загальну, стандартну та канонічну задачі лінійного програмування.
7. Поясніть особливості матричної та векторної форм запису канонічної задачі.
8. Які правила зведення будь-якої лінійної задачі до стандартного вигляду?

9. Наведіть визначення основних понять геометрії опуклих множин.
10. Надайте формулювання та математичну модель задачі про використання ресурсів.
11. Надайте формулювання та математичну модель задачі складання раціону.
12. Наведіть формулювання та математичну модель задачі про використання потужностей.
13. Сформулюйте та наведіть математичну модель задачі про розкрій матеріалів.
14. Сформулюйте і наведіть математичну модель транспортної задачі.
15. Поясніть геометричний зміст нерівностей, умови невід'ємності змінних і цільової функції.
16. Опишіть алгоритм графічного методу розв'язування задачі лінійного програмування, його переваги та недоліки.
17. Як можна виконати зведення загальної задачі лінійного програмування до канонічної форми?
18. Розкрийте зміст поняття симплекс-методу та наведіть його алгоритм.
19. Яка ознака оптимальності опорного плану?
20. Охарактеризуйте метод штучного базису.
21. Розкрийте поняття і вид двоїстої задачі лінійного програмування.
22. Наведіть правила побудови двоїстих задач.
23. Сформулюйте першу теорему двоїстості.
24. Сформулюйте другу та третю теореми двоїстості.
25. Наведіть економічну інтерпретацію двоїстої задачі.
26. Охарактеризуйте постановку задачі цілочислового програмування.
27. У чому полягає сутність методів відтинання?
28. Наведіть алгоритм методу Гоморі.
29. Наведіть алгоритм методу „гілок і меж”.

30. Опишіть постановку загальної задачі математичного програмування.

31. Які особливості задач нелінійного програмування і методів їх розв'язання?

32. Наведіть алгоритм графічного методу розв'язання задач нелінійного програмування.

33. Які необхідні та достатні умови екстремуму функції Лагранжа?

34. Поясніть алгоритм методу множників Лагранжа.

35. Розкрийте зміст понять поняття опуклих, вгнутих, строго опуклих і строго вгнутих функцій.

36. Назвіть алгебраїчні та аналітичні властивості опуклих функцій.

37. Сформулюйте теорему Куна – Таккера.

38. Опишіть постановку задачі динамічного програмування.

39. Які особливості моделі динамічного програмування?

40. Розкрийте принцип оптимальності Беллмана.

41. Наведіть рівняння Беллмана.

42. Розкрийте зміст понять теорії ігор та її основної задачі, гри, гравців, виграшу та правил.

43. Поясніть зміст понять ходу гравця, його стратегії, рішення гри, умови стійкості оптимальної стратегії, мети теорії ігор.

44. Що таке платіжна матриця, нижня та верхня ціна гри?

45. У чому особливість прийняття рішень в умовах невизначеності?

46. Поясніть суть критерію Лапласа.

47. Охарактеризуйте критерій Вальда.

48. Що таке критерій Гурвіца?

49. У чому суть критерію Севіджа?

50. Поясніть предмет економетрії, параметри системи, екзогенні та ендогенні змінні.

51. Охарактеризуйте економетричну модель, її загальний вигляд, класифікацію та етапи побудови.

52. Наведіть алгоритм методу найменших квадратів для парної регресії, коефіцієнт кореляції.

53. Які основні передумови регресійного аналізу? Що таке залишкова дисперсія? Сформулюйте теорему Гаусса – Маркова.
54. Що таке інтервальна оцінка функції регресії та її параметрів?
55. Як оцінити значущість рівняння регресії? Поясніть і наведіть коефіцієнт детермінації, коефіцієнт Спірмена.
56. Наведіть алгоритм методу найменших квадратів для множинної регресії.
57. Які умови існування класичної нормальної лінійної моделі множинної регресії?
58. Охарактеризуйте коваріаційну матрицю.
59. Охарактеризуйте довірчі інтервали для коефіцієнтів та функції множинної регресії.
60. Як оцінити значущість рівняння множинної регресії?
61. Охарактеризуйте мультиколінеарність змінних, методи її усунення або зменшення.
62. Опишіть лінійні моделі зі змінною структурою. Наведіть критерій Г. Чоу.
63. Які існують види нелінійних регресійних моделей? Охарактеризуйте функцію Кобба – Дугласа та її види.
64. Що таке коефіцієнти часткової еластичності та кореляції?
65. Наведіть узагальнену лінійну модель множинної регресії.
66. Наведіть алгоритм узагальненого методу найменших квадратів.
67. Розкрийте поняття гомо- та гетероскедастичності. Що таке критерій μ ?
68. Охарактеризуйте параметричний та непараметричний тести Гольдфельда – Кванта, тест Глейсера.
69. Що таке часовий ряд? Які його складові та моделі?
70. Охарактеризуйте автокореляцію рівнів часового ряду, автокореляційну функцію, її властивості.
71. Наведіть алгоритм моделювання часового ряду.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Білоцерківський О. Б. Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Економіко-математичне моделювання» для студентів спеціальностей 7.050206 «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності» та 6.030508 «Фінанси» / уклад.: О. Б. Білоцерківський, Н. В. Ширяєва. – Х. : НТУ «ХП», 2009. – 76 с.
2. Івченко І. Ю. Математичне програмування : навч. посібник / І. Ю. Івченко. – К. : Центр учбової літератури, 2007. – 232 с.
3. Лунгу К. Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач / К. Н. Лунгу. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 128 с.
4. Боровік О. В. Дослідження операцій в економіці : навч. посібник / О. В. Боровік, Л. В. Боровік. – К. : Центр навчальної літератури, 2007. – 424 с.
5. Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике : учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. – М. : ЮНИТИ, 2006. – 407 с.
6. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій : навч. посібник / В. Я. Кутковецький. – К. : Видавничий дім «Професіонал», 2004. – 350 с.
7. Білоцерківський О. Б. Економетрія : навч.-метод. посібник / О. Б. Білоцерківський, Н. В. Ширяєва. – Х. : НТУ «ХП», 2008. – 80 с.
8. Клебанова Т. С. Эконометрия : учеб. пособие / Т. С. Клебанова, Н. А. Дубровина, Е. В. Раевнева. – Х. : ИД «ИНЖЭК», 2005. – 160 с.
9. Кремер Н. Ш. Эконометрика : учебник для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 311 с.
10. Лугінін О. Є. Економетрія : навч. посібник / О. Є. Лугінін, С. В. Білоусова, О. М. Білоусов. – К. : Центр навчальної літератури, 2005. – 252 с.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
Тема 1. Побудова математичних моделей економічних задач.....	4
Тема 2. Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування.....	12
Тема 3. Симплекс-метод розв'язання задач лінійного програмування.....	20
Тема 4. Метод штучного базису.....	27
Тема 5. Двоїста задача лінійного програмування.....	31
Тема 6. Транспортна задача.....	36
Тема 7. Задачі цілочислового програмування.....	43
Тема 8. Задачі нелінійного програмування.....	49
Тема 9. Задачі динамічного програмування.....	56
Тема 10. Задачі теорії ігор.....	60
Тема 11. Ігри з природою.....	64
Тема 12. Парний регресійний аналіз.....	68
Тема 13. Множинний регресійний аналіз.....	74
Тема 14. Узагальнений метод найменших квадратів.....	80
Контрольні запитання.....	82
Список літератури.....	86

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять з курсу
"Економіко-математичне моделювання"
для студентів спеціальності
6.03060101 "Менеджмент організацій"

Укладачі: **БІЛОЦЕРКІВСЬКИЙ** Олександр Борисович
ШИРЯЄВА Наталя Володимирівна

Відповідальний за випуск В. А. Міщенко

Роботу до видання рекомендував О. М. Гавриш

Редактор А. А. Пустовойтова

План 2014 р., поз. 80

Підп. до друку 20.05.2014 р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.

Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк.

Наклад 50 прим. Зам №____. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ "ХПІ".

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.

61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.

Друкарня НТУ "ХПІ". 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.